CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE 2001
filière PC math 2

PARTIE I

I.1 Pour tout réel x l'application $t \mapsto \cos(n\,t - x\sin t)$ est continue sur le segment $[0,\pi]$. Elle y est donc intégrable

$$\boxed{J_n \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

Soit $\phi\ :\ (x,t) \mapsto \cos(n\,t - x\sin t)$ .Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$ et on l'intègre sur un segment (donc inutile de dominer). cela prouve la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'intégrale à paramètre $\int_0^\pi \phi(x,t)\,dt$.

Si $x\in\mathbb{R}$, on a, via le changement de variable C^1 $u=\pi-t$:

$$J_n(-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\,t + x\sin t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\,\pi - n\,u + x\sin u)\,du = (-1)^n J_n(x)$$

donc

$$\boxed{J_n \text{ a la parité de } n}$$

I.2 On a $J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-n\,t - x\sin t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\,t + x\sin t)\,dt = J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$ d'après le I.1.

$$\boxed{J_{-n} = (-1)^n\,J_n}$$

I.3 Soit $p\in\mathbb{N}^*$; ϕ possède des dérivées partielles $\frac{\partial^p\phi}{\partial x^p}(x,t) = (-\sin t)^p\cos(n\,t - x\sin t + n\frac{\pi}{2})$ qui sont toutes continues sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$. Comme on intègre sur un segment cela suffit à fournir le caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ de J_n .

$$\boxed{J_n \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

I.4 Fixons $n\in\mathbb{N}$. D'après la question précédente, J_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin t\,.\,\sin(n\,t - x\sin t)\,dt$; une intégration par partie avec $\begin{cases} u'(t) = -\sin t \text{ si } u(t) = \cos t \\ v(t) = \sin(n\,t - x\sin t) \text{ donc } v'(t) = (n - x\cos t)\cos(n\,t - x\sin t)\end{cases}$ valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, donne alors :

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\left([\cos t.\sin(n\,t - x\sin t)]_0^\pi - \int_0^\pi \cos t.\left[(n - x\cos t)\cos(n\,t - x\sin t)\right]\,dt\right)$$

Le terme intégré étant nul, on obtient le résultat voulu:

$$\boxed{J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos t.\left[(n - x\cos t)\cos(n\,t - x\sin t)\right]\,dt}$$

On a d'après I.3 : $J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 t\cos(n\,t - x\sin t)\,dt$.
Et donc, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\,t - x\sin t)\left\{-x^2\sin^2 t + x(n - x\cos t)\cos t + (x^2-n^2)\right\}\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi n\cos(n\,t - x\sin t)(x\cos t - n)\,dt = -\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos(u(t))u'(t)dt \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\sin(n\,t - x\sin t\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

on a donc

$$\boxed{x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2-n^2)J_n(x) = 0}$$

PARTIE II

II.1

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(2p\,t - x\sin t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\cos(2p\,t)\cos(x\sin t) - \sin(2p\,t)\sin(x\sin t)\right)dt$$

or si on pose $u=\pi-t$ (changement de variable C^1) on trouve

$$\int_0^\pi \sin(2p\,t)\sin(x\sin t)\,dt = -\int_0^\pi \sin(2p\,u)\sin(x\sin u)\,du$$

L'intégrale est égale à son opposé donc elle est nulle.

$$\boxed{J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(2p\,t)\cos(x\sin t)\,dt}$$

Le même procédé fournit l'égalité $\boxed{J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(2p+1)t\,.\,\sin(x\sin t)\,dt}$

II.2 Traitons le cas $n = 2p$; on sait que $\cos u = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n)!}$ avec un rayon de convergence infini. Donc pour tout $t \in [0,\pi]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x\sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}\sin^{2n} t}{(2n)!}$.
Si on pose $\phi_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n}\sin^{2n} t}{(2n)!}$.

- les fonctions ϕ_n sont continue donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$
- la série $\sum \phi_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0,\pi]$:

$|\phi_n(t)| \leq \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ quantité indépendante de t telle que $\sum \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ converge (vers $ch\,(|x|)$)

- on peut donc intégrer termes à termes la série. :

$$\boxed{J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^\pi \cos(2p\,t)\sin^{2n} t\,dt}$$

  avec convergence pour tout $x \in \mathbb{R}$; le développement en série entière à un rayon de convergence $+\infty$.

- On peut aussi dire $\int_0^\pi |\phi_n| \leq \pi \sup(|\phi_n|) \leq \pi\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$ et donc utiliser la convergence de $\sum \int_0^\pi |\phi_n|$

On obtient exactement de la même façon :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^\pi \sin(2p+1)t\,.\,\sin^{2n+1} t\,dt}$$

II.3.1 Les formules d'Euler $\sin t = \frac{e^{i\,t}-e^{-i\,t}}{2\,i}$, $\cos(2h\,t) = \frac{e^{2h\,i\,t}+e^{-2h\,i\,t}}{2}$ et la formule de Newton $(a-b)^{2k} = \sum_{h=0}^{2k}\binom{2k}{h}(-1)^h a^{2k-h}b^h$ permettent d'écrire

$$\sin^{2k} t = \left(\frac{e^{i\,t}-e^{-i\,t}}{2i}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2i}\right)^{2k}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\left(e^{it}\right)^{2k-j}\left(-e^{-it}\right)^j = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}e^{(2k-2j)it}$$

si on regroupe le terme en j et le terme en $2k-j$ on a :

$$\binom{2k}{j}e^{(2k-2j)it} + \binom{2k}{2k-j}e^{(2j-2k)it} = 2\binom{2k}{j}\cos\left((2k-2j)\,t\right)$$

avec le cas particulier $j = k$ qui donne $\binom{2k}{k}$

$$\begin{aligned}
\sin^{2k} t &= \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k} + \frac{(-1)^k}{22^{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{2k}{j}\cos\left((2k-2j)\,t\right)\\
&= \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k} + \frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{q=1}^{k}(-1)^q\binom{2k}{k-q}\cos(2qt) \text{ en posant } q = k-j
\end{aligned}$$

D'autre part pour $r \neq \pm s$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(r\,t)\cos(s\,t)\,dt &= \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \cos\left((r+s)\,t\right)dt + \int_0^\pi \cos\left((r-s)\,t\right)dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left((r+s)t\right)}{r+s} + \frac{\sin\left((r-s)\,t\right)}{r-s}\right]_0^\pi = 0
\end{aligned}$$

et pour $r \neq 0$

$$\int_0^\pi \cos(r\,t)dt = 0$$

Donc, si $k < p$ (ce qui suppose $p \geq 1$), on a $2h \neq 2p$ donc :

$$\int_0^\pi \cos(2p\,t)\sin^{2k} t\,dt = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\int_0^\pi \cos(2pt)\,dt + \frac{1}{2^{2k-1}}\sum_{q=1}^{k}(-1)^q\binom{2k}{k-q}\int_0^\pi \cos(2pt)\cos(2q\,t)dt = \sum 0 = 0$$

de même si $k \geq p$, tous les termes sont nuls sauf si $p = q$

$$\int_0^{\pi} \cos(2p\,t) \sin^{2k} t\, dt = \frac{(-1)^p}{2^{2k-1}} \binom{2k}{k-p} \int_0^{\pi} \cos^2(2p\,t)\, dt = \frac{(-1)^p}{2^{2k-1}} \binom{2k}{k-p} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(2p\,t) \sin^{2k} t\, dt = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k-p} \pi$$

On en déduit aussitôt que :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \int_0^{\pi} \cos(2p\,t) \sin^{2k} t\, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k}{k-p} \pi = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k-p} \frac{1}{4^k (k+p)!(k-p)!} x^{2k}$$

donc

$$\boxed{\alpha_{2k}(p) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < p \\ (-1)^{k-p} \frac{1}{4^k (k+p)!(k-p)!} \text{ si } k \geq p \end{cases}}$$

II.3.2 On recommence :
Ne vous contentez pas de lire le calcul : au II.3.1. vous avez lu la méthode . prenez un brouillon , rédigez ce calcul du II.3.2 puis comparez. Il faut s'entraîner au calcul.
Les formules d'Euler $\sin t = \frac{e^{i\,t} - e^{-i\,t}}{2\,i}$, $\sin((2h+1)\,t) = \frac{e^{(2h+1)i\,t} - e^{-(2h+1)i\,t}}{2i}$ et la formule de Newton permettent d'écrire

$$\sin^{2k+1} t = \left(\frac{e^{i\,t} - e^{-i\,t}}{2i} \right)^{2k+1} = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{h=0}^{k} (-1)^q \binom{2k+1}{k-j} \sin((2h+1)\,t)$$

.

Par ailleurs, $\int_0^{\pi} \sin((2p+1)\,t) \sin((2q+1)\,t)\, dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t)]\, dt = 0$ si $p \neq q$.
Donc, si $k < p$ (ce qui suppose $p \geq 1$), on a :

$$\int_0^{\pi} \sin((2p+1)\,t) \sin^{2k+1} t\, dt = 0$$

et si $k \geq p$, on a :

$$\int_0^{\pi} \sin((2p+1)\,t) \sin^{2k+1} t\, dt = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \int_0^{\pi} \sin^2((2p+1)\,t)\, dt = \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit aussitôt que :

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \int_0^{\pi} \sin((2p+1)\,t) \sin^{2k+1} t\, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{(-1)^p}{4^k} \binom{2k+1}{k-p} \frac{\pi}{2}$$

soit

$$J_{2p+1}(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^{k-p} \frac{1}{2\,4^k (k-p)!(k+1+p)!} x^{2k+1}$$

donc

$$\boxed{\alpha_{2k+1}(p) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < p \\ (-1)^{k-p} \frac{1}{2\,4^k (k-p)!(k+1+p)!} \text{ si } k \geq p \end{cases}}$$

II.4.1 Soit $x \in \mathbb{R}$; les applications $u \;:\; t \mapsto \cos(x \sin t)$ et $v \;:\; t \mapsto \sin(x \sin t)$ sont dans $\mathcal{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc d'après un théorème de Dirichlet, elles sont développables en série de Fourier avec convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
u est paire donc $b_n(u) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, dt = 2J_0(x)$ et
$a_n(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) \cos(n\,t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(nt + x \sin t) + \cos(nt - x \sin t))\, dt = J_n(x)\,((-1)^n + 1)$

$$\boxed{b_n(u) = 0 \text{ et } a_n(u) = \begin{cases} 2J_n(x) \text{ si } n \text{ pair et } n > 0 \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}}$$

v est impaire donc $a_n(v) = 0$ pour tout n et

$b_n(v) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\,\sin t)\sin(n\,t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos(nt - x\sin t) - \cos(nt + x\sin t))\,dt = J_n(x)\,(1-(-1)^n)$

$$\boxed{a_n(v) = 0 \text{ et } b_n(v) = \begin{cases} 2J_n(x) \text{ si } n \text{ impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}}$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec CVU sur $\mathbb{R}$:

$$\cos(x\,\sin t) = J_0(x) + \sum_{p=1}^{+\infty} 2J_{2p}(x)\cos(2p\,t) \qquad \sin(x\,\sin t) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2J_{2p+1}(x)\sin\left((2p+1)\,t\right)$$

II.4.2
Avec $t = \frac{\pi}{2}$ dans la première, on a :

$$\boxed{J_0(x) + 2\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p J_{2p}(x) = \cos(x)}$$

avec $t = 0$ on a :

$$\boxed{J_0(x) + 2\sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}(x) = 1}$$

avec $t = \frac{\pi}{2}$ dans la seconde on a

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\, J_{2p+1}(x)t}$$

Puisque u et v sont C^0_{pm} sur $\mathbb{R}$,
la formule de Parseval s'applique et donne, pour tout $x \in R$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x\sin t)\,dt = \frac{1}{4}a_0^2(u) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{2p}^2(u) = J_0^2(x) + 2\sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}^2(x)$$

et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(x\sin t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} b_{2p+1}^2(v) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}^2(x)$$

En ajoutant il vient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2(x\sin t) + \sin^2(x\sin t))\,dt = J_0^2(x) + 2\sum_{p=1}^{+\infty} J_{2p}^2(x) + 2\sum_{p=0}^{+\infty} J_{2p+1}^2(x)$$

soit en regroupant les séries

$$\boxed{1 = J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} J_n^2(x)}$$

PARTIE III

III.1.1 Posons $y(x) = x^{\lambda} z(x)$ alors $y \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{K}) \Leftrightarrow z \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{K})$
et pour $x \in]0, +\infty[$:

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} z(x) + x^{\lambda} z'(x) \quad y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}z(x) + 2\lambda x^{\lambda-1}z'(x) + x^{\lambda}z''(x)$$

on en déduit que y est solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si :

$$x^{\lambda+1}(xz''(x) + (2\lambda+1)z'(x) + xz(x)) = 0$$

et comme $x > 0$, ceci équivaut à

$$\boxed{xz''(x) + (2\lambda+1)z'(x) + xz(x) = 0}$$

III.1.2 On suppose $\lambda = -\frac{1}{2}$;
on a alors sur $]0, +\infty[$ z solution de $(B'_{-\frac{1}{2}})$ si et seulement si $z'' + z = 0$ équation classique

z est solution si et seulement si il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x, $z(x) = A\cos x + B\sin x$
et donc

$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \forall x > 0 \ : y(x) = \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

III.1.3 En observant que $(B_{-\frac{1}{2}}) = (B_{\frac{1}{2}})$, on en déduit que la solution générale sur $]0,+\infty[$ de $(B_{\frac{1}{2}})$ est aussi $y(x) = \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$ A, B décrivant $\mathbb{R}$; la solution générale sur $]0,+\infty[$ de $(B'_{\frac{1}{2}})$ est alors :

$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2 \ , \forall x > 0 : \ z(x) = \frac{A\cos x + B\sin x}{x}$$

III.2.1
Supposons que, $z(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ (avec un rayon de convergence $R > 0$) est solution de (B'_λ) ; comme la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et que l'on peut dériver terme à terme, on a, sur $]-R, R[$:

$$z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad et \ z''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)k\, a_k x^{k-2}$$

et donc z est solution de (B'_λ) si et seulement si

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)k\, a_k x^{k-1} + (2\lambda+1)\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{k+1} = 0$$

soit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{+\infty}(2\lambda+1)(k+1)a_{k+1}x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1}x^k = 0$$

soit encore

$$(2\lambda+1)\, a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[(2\lambda+1+k)(k+1)a_{k+1} + a_{k-1}\right]x^k = 0$$

L'unicité du développement en série entière fournit alors : pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(k+1)(2\lambda+1+k)a_{k+1} + a_{k-1} = 0$$

III.2.2 Notons $a_k(\lambda) = a_k$; on cherche les solutions vérifiant $a_{2k+1}(\lambda) = 0$ pour tout k. Comme $-\lambda \notin \mathbb{N}$, on note que $\lambda + h \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.
La relation du III.2.1 donne en substituant $2k-1$ à k, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $(2k)(2\lambda+2k)a_{2k} + a_{2k-2} = 0$; on en déduit que

$$a_{2k}(\lambda) = \frac{(-1)^k}{\prod_{i=1}^k 2i(2\lambda+2i)} a_0(\lambda) = \frac{(-1)^k}{4^k\, k! \prod_{i=1}^k(\lambda+i)}$$

Donc si il existe une solution de (B'_λ) de la forme $z(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$, avec $a_0(\lambda) = 1$ alors on a nécessairement, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p}(\lambda) = \frac{(-1)^p}{4^p\, p! \prod_{1 \le i \le p}(\lambda+i)}$.
Réciproquement, la série entière $\sum \left(\frac{(-1)^p}{4^p\, p! \prod_{i=1}^k(\lambda+i)} x^{2p}\right)$ a un rayon de convergence $R = +\infty$ puisque en utilisant la règle de d'Alembert, la limite

$$\frac{\left|a_{2p+2}(\lambda)x^{2p+2}\right|}{|a_{2p}(\lambda)x^{2p}|} = \frac{x^2}{4(p+1)|\lambda+p+1|} -\!>_{p->+\infty} 0$$

montre que la série numérique $\sum \frac{(-1)^p}{4^p\, p! \prod_{i=1}^k(\lambda+i)} x^{2p}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Les équivalences du III.2.1 montrent alors que la somme $z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda)x^{2p}$ est solution sur $]0,+\infty[$ de (B'_λ).

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p\, p! \prod_{i=1}^k(\lambda+i)} x^{2p}}$$

III.3.1 λ étant supposé non entier, ce qui procède s'applique à $-\lambda$ et $z_{-\lambda}$ est solution de $(B'_{-\lambda})$ donc $j_{-\lambda}$ est solution (non nulle) de l'équation $(B_{-\lambda}) = (B_\lambda)$.
j_λ et $j_{-\lambda}$ sont donc deux solutions non nulles de (B_λ)
supposons $\lambda > 0$ (l'autre cas est symétrique) alors

- $j_\lambda(x) = x^\lambda z_\lambda(x)$ admet une limite nulle en zéro (z_λ est continue et $z_\lambda(0) = 1$)
- $j_{-\lambda}(x) = x^{-\lambda} z_{-\lambda}(x)$ tend lui vers $+\infty$ si x tend vers 0
- les deux fonctions ne peuvent pas être proportionnelles.
- (B_λ) est linéaire, homogène, résolue en y'', à coefficients continus sur $]0, +\infty[$; l'ensemble des $]0, +\infty[$-solutions est un espace vectoriel de dimension 2 , $(j_\lambda, j_{-\lambda})$ étant une famille libre de cardinal 2 est donc une base de (B_λ) et la solution générale de (B_λ) est donc :

$$\exists\,(A,B) \in \mathbb{R} \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ , \ y(x) = A\,x^\lambda z_\lambda(x) + B\,x^{-\lambda} z_{-\lambda}(x)$$

III.3.2 On a $j_n(x) = x^n\, z_n(x) = x^n \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(n) x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4^p p! \prod_{i=1}^{k}(n+h)} x^{2p+n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p n!}{4^p p! (n+p)!} x^{2p+n}$.
pour n pair : $n = 2q$; on a alors :

$$j_{2q}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2q)!}{4^p p! (q+p)!} x^{2p+2q} = 4^q (2q)! \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-q}}{4^k (k-q)!(k+q)!} x^{2k} \text{ en posant } k = p+q$$

En reprenant les $\alpha_{2k}(p)$ du II3 on obtient :

$$\boxed{j_{2q} = 4^q (2q)! J_{2q}}$$

et si n est impair : $n = 2q+1$;

$$\boxed{j_{2q+1}(x) = 2.\,4^q (2q+1)! J_{2q+1}}$$

z_n est solution de (B'_n) et pour tout $x > 0$, on a : $z'_{-n}(x) = 2n x^{2n-1} z_n(x) + x^{2n} z'_n(x)$ puis $z''_{-n}(x) = 2n(2n-1)x^{2n-2} z_n(x) + 4n x^{2n-1} z'_n(x) + x^{2n} z''_n(x)$.
On en déduit que $x z''_{-n}(x) + (-2n+1) z'_{-n}(x) + x z_{-n}(x) = x^{2n}\left[x z''_n(x) + (2n+1) z'_n(x) + x z_n(x)\right] = 0$.
Ce qui démontre que z_{-n} est solution de (B'_{-n}).