MINES PONT 2003
Epreuve commune PC-PSI

Première partie

1. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies , $E \times F$ est un espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$: Si $(e_i)_{i=1}^n$ est une base de E et $(f_j)_{j=1}^p$ une base de F une base de $E \times F$ est $\left\{\left(e_i, \overrightarrow{0}\right)\right\}_{i=1}^n \cup \left\{\left(\overrightarrow{0}, f_j\right)\right\}_{j=1}^p$
Donc ici $C = \mathcal{M}_3(\ \mathbb{R}) \times \mathcal{M}_3(\ \mathbb{R})$ est de dimension et

$$\boxed{\dim(C) = 18}$$

2. critère d'algèbre:

- C est un $\mathbb{R}$–espace vectoriel d'élément neutre est $(0, 0)$.
- $(C, +, *)$ est un anneau unitaire:
  - le produit $*$ est une loi de composition interne
  - associative : (attention à l'ordre des termes le produit matriciel n'est pas commutatif)

$$\begin{aligned} ((P, P') * (Q, Q')) * (R, R') &= (PQ, PQ' + P'Q) * (R, R') = (PQR, PQR' + PQ'R + P'QR) \\ (P, P') * ((Q, Q') * (R, R')) &= (P, P') * (QQ', QR' + Q'R) = (PQR, PQR' + PQ'R + P'QR) \end{aligned}$$

  - d'élément neutre $e = (I_3, 0)$ (à gauche et à droite). .
- Enfin, on a $\lambda \left(\dot{(}P, P') * (Q, Q')\right) = (\lambda(P, P')) * (Q, Q') = (PP') * (\lambda\,(Q, Q'))$. les trois expressions valant

$$(\lambda PQ, \lambda PQ' + \lambda P'Q)$$

$$\boxed{C \text{ est une } \mathbb{R}\text{-algèbre de dimension } 18}$$

3. revenons à la définition d'un groupe : (pas de critère de sous groupe une algèbres n'étant pas un groupe multiplicatif)

- La loi $*$ est interne dans G. Si $(P, P') \in G, (Q, Q') \in G$ alors on doit montrer $(PQ, PQ' + P'Q) \in G$:
  - $PR \in SO(\ \mathbb{R}^3)$ (car $SO(\ \mathbb{R}^3)$ est un groupe)
  - et
  $$^t(PQ)(PQ' + P'Q) +^t (PQ' + P'Q)PQ = {}^tQ\,{}^tPPQ' + {}^tQ\,{}^tPP'Q + {}^tQ'\,{}^tPPQ + {}^tQ^tP'PQ$$
  or P est orthogonale donc ${}^tPP = I_n$:
  $$\begin{aligned} {}^t(PQ)(PQ' + P'Q) + {}^t(PQ' + P'Q)PQ &= {}^tQQ' + {}^tQ\,{}^tPP'Q + {}^tQ'Q + {}^tQ^tP'PQ \\ &= \left({}^tQQ' +^t Q'Q\right) + {}^tQ\left({}^tPP' + {}^tP'P\right)Q = 0 + {}^tQ\,0\,Q = 0 \end{aligned}$$
- La loi $*$ est associative comme restriction d'une loi associative à un sous ensemble.
- tout élément (P, P') admet un inverse dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
  - analyse : Si $(P, P') * (Q, Q') = (I_3, 0)$ on a
  $PQ = I_3$ donc $Q = {}^tP$: P étant orthogonale P est inversible d'inverse P^{-1} .
  et $PQ' + P'Q = 0$ donc $Q = {}^tP$ et $Q' = -{}^tPP'Q = -P^{-1}P'\,{}^tP = -{}^tPP'\,{}^tP = {}^tP'P^tP = {}^tP'$ (n'oubliez pas que (P, P') est dans G donc ${}^tPP' = {}^tP'P$)
  - synthèse : On pose$(Q, Q') = ({}^tP,^t P')$.
  On a alors d'après le calcul précédent $(P, P') * (Q, Q') = (I_3, 0)$
  On vérifie sans problème que $(Q, , Q')\,(P, P') = (I_3, 0)$
  Il reste à vérifier que $({}^tP,^t P') \in G$. En effet, comme P est orthogonale directe ${}^tP$ est aussi orthogonale directe et :

$${}^t\left({}^tP\right)^t P' + {}^t\left({}^tP'\right)^t P = P^tP' + P'\,{}^tP$$

ce n'est pas commutatif : il faut faire un effort :${}^tPP' + {}^tP'P = 0$ donc ${}^tP' = -{}^tPP'^tP$ et donc :

$${}^t\left({}^tP\right)^t P' + {}^t\left({}^tP'\right)^t P = -P^tPP'{}^tP + P'{}^tP = 0 \text{ car } P \text{ est orthogonale}$$

$$\boxed{G \text{ est un groupe (non abélien) de neutre } (I_3, 0) \text{ et } (P, P')^{-1} = {}^t(P, P')}$$

4. H est un sous–groupe de G :

- c'est un sous ensemble de G
- non vide : il contient $(I_3, 0)$
- et si $(P, 0)$ et $(Q, 0)$ sont dans H alors $(P, 0) * (Q, 0)^{-1} = (P^tQ, 0)$ est dans H.

Enfin l'application φ définie sur $SO(\mathbb{R}^3)$ par

$$\varphi : P \longmapsto (P, 0)$$

est un morphisme bijectif de groupes entre $SO(\mathbb{R}^3)$ et H (démonstration évidente).

$$\boxed{H \text{ est un sous groupe de } G \text{ isomorphe à } SO(\mathbb{R}^3)}$$

5. On a $(I_3, Q) \in G$ si et seulement I_3 est orthogonale directe (évident) et ${}^tI_3Q + {}^tQI^3 = 0$ (Q est antisymétrique). On a bien un sous groupe de G :

- sous ensemble de G
- non vide (contient $(I_3, 0)$)
- et si (I_3, P) et (I_3, Q) sont dans A : $(I_3, Q) * (I_3, Q')^{-1} = (I, Q +^t Q') = (I, Q - Q') \in A$ (la différence de deux matrices antisymétriques est antisymétrique)

$$\boxed{A \text{ est un sous–groupe de } G}$$

6.

- Si $(P, Q) \in G$ $P \in SO(\mathbb{R}^3)$ (donc $\det(P) = 1$) et ${}^tPQ +^t QP = 0$ donc ${}^t(P, Q) * (P, Q) = ({}^tPP +^t PQ +^t QP) = (I_3, 0)$
- Si ${}^t(P, Q) * (P, Q) = (I_3, 0)$ On a ${}^tPP = I_3$ (et comme $\det(P) = 1$, P est une matrice orthogonale directe) et ${}^tPQ +^t QP = 0$

$$\boxed{(P, Q) \in G \Leftrightarrow (\det(P) = 1 \text{ et } {}^t(P, Q)(P, Q) = (I_3, 0))}$$

Deuxième partie

Si $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ la matrice de $p_{\overrightarrow{a}}$ est $\begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix}$

8. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^3$ une base orthonormée directe. L'application r étant une rotation directe $r(\mathcal{B})$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^3$; donc pour tout couple (i, j) , $r(e_i \wedge e_j) = r(e_i) \wedge r(e_j)$:

- si $i = j$ on a deux fois le vecteur nul
- sinon $r(e_i) \wedge r(e_j)$ est l'unique vecteur f tel que $(r(e_i), r(e_j), f)$ forme une base orthonormale directe. C'est donc $r(e_i \wedge e_j)$ et donc pour tous vecteurs $\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^3 x_ie_i$, $\overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^3 y_ie_i$, on a

$$r(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y}) = \left(\sum_{i,j} x_iy_jr(e_i \wedge e_j)\right) = \sum_{i,j} x_iy_jr(e_i) \wedge r(e_j) = r(\overrightarrow{x}) \wedge r(\overrightarrow{y})$$

$$\boxed{r(\overrightarrow{x}) \wedge r(\overrightarrow{y}) = r(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{y})}$$

9. r étant inversible on peut introduire r^{-1} et calculer $r \circ p_a r^{-1}$ en utilisant le résultat précédent :

$$\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : r \circ p_a \circ r^{-1}(\overrightarrow{x}) = r(a \wedge r^{-1}(\overrightarrow{x})) = r(\overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{x}$$

Donc

$$\boxed{\overrightarrow{b} = r(\overrightarrow{a})}$$

10.(cf figure) Soit $M \in D$. $\overrightarrow{AM}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{u}$: $\exists k \in \mathbb{R}$,$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{u}$. On a donc

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{u} + k\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{u}$$

Le vecteur $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u}$ est constant et égal à $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{u}$, vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par propriété du produit vectoriel.

11.

- si $\overrightarrow{v} = 0$ l'équation $\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = 0$ a pour solution la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$.
- si $\overrightarrow{v} \neq 0$. La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ est libre de $\mathbb{R}^3$. C'est est une base (orthogonale mais pas orthonormale) . Soit $\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v} + \gamma(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ on a alors

$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = -\beta(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \gamma \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \beta = 0, \gamma = 1$$

  Donc

$$\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dans les deux cas, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\overrightarrow{x} = \alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}, \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

On peut aussi utiliser le double produit vectoriel pour montrer que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est solution , puis prouver que $\overrightarrow{x}$ est solution ssi $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \in Vect(\overrightarrow{u})$

12. C'est la question précédente avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{OM}$ en prenant comme origine sur la droite A tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{u} \Leftrightarrow M \in D(A, \overrightarrow{u})$$

Dans toute la suite du problème il faut bien comprendre cette définition des droites par un couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\overrightarrow{u}$ étant un vecteur directeur unitaire de la droite et $\overrightarrow{v}$ un vecteur tel que $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. Le couple est indépendant de la base choisie dans l'espace vectoriel euclidien , mais dépend de l'origine 0 de l'espace affine.

13.(cf figure) On a $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ Soit si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le système $\begin{cases} 0 = 0 \\ z = b \\ -y = c \end{cases}$

$$\boxed{D = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -c \\ b \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

14. Les couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ déterminent la même droite si et seulement si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ sont liés (comme ils sont unitaires $\overrightarrow{u'} = \pm \overrightarrow{u}$) et le point A' déterminé par $OA' = \overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v'}$ appartient à D, soit $(\overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v'}) - \overrightarrow{v} \in Vect(\overrightarrow{u})$

- si $\overrightarrow{u'} = \overrightarrow{u}$, $(\overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v'}) - \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v'}) - \overrightarrow{v}$, vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Donc $(\overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v'}) - \overrightarrow{v} \in Vect(\overrightarrow{u})$ si et seulement si il est nul donc $(\overrightarrow{u'} \wedge \overrightarrow{v'}) = \overrightarrow{v}$
- si $\overrightarrow{u'} = -\overrightarrow{u}$, de même $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v'}$.

$$\boxed{\text{les deux couples définissent le même droite si et seulement si } \left(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\right) = \pm(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$$

<u>révision de Sup</u>: Si vous ne l'avez pas fait en préparant le devoir (mais je me trompe sûrement) il est indispensable de revoir votre cours de Sup . Savoir que tout déplacement de l'espace est une rotation , une translation ou un vissage aide à se représenter les choses et à faire des figures.

15. L'image d'une droite $D(A, \overrightarrow{u})$ par un déplacement d est la droite $D(A', \overrightarrow{u'})$ où $A' = d(A)$ et $\overrightarrow{u'} = r(\overrightarrow{u})$:

- A est élément de la droite D donc $A' = d(A)$ est élément de D'.

- $B = A + \overrightarrow{u}$ est élément de D donc $B' = d(A + \overrightarrow{u})$ défini par $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{a} + r(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{a} + r(\overrightarrow{OA}) + r(\overrightarrow{u}) = A' + r(\overrightarrow{u})$ est un point de D' et donc $r(\overrightarrow{u})$ est un vecteur directeur de D' .

  Ainsi D' est associée au couple $(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ avec $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{u'}$. Donc

$$\overrightarrow{v'} = (\overrightarrow{a} + r(\overrightarrow{OA})) \wedge r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{a} \wedge r(\overrightarrow{u}) + r(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{a} \wedge r(\overrightarrow{u}) + r(\overrightarrow{v})$$

Ainsi

$$\boxed{\alpha = r, \beta = p_{\overrightarrow{a}} \circ r}$$

et on det $(\alpha) = 1 > 0$ car α est un endomorphisme orthogonal direct.
Même si le sujet ne le demande pas il est facile de déduire du 15 l'unicité de la décomposition précédente.

16. Dans une base orthonormée B soit $A = Mat\,(\alpha)$, $B = Mat\,(\beta)$, M celle de p_α calculée à la question 10.

- α étant un endomorphisme orthogonal direct A est une matrice est orthogonale de déterminant 1,
- $B = AM$. où M est une matrice antisymétrique et donc

$$^{t}AB + {}^{t}BA = {}^{t}AMA + {}^{t}A(-M)A = 0$$

17. Supposons que deux déplacements $d = t_{\overrightarrow{a}} \circ r, d' = t_{\overrightarrow{b}} \circ r'$, possèdent la même image : le même couple (A, B).
On a alors

- $r = r'$ (même matrice A)
- $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$: $p_{\overrightarrow{a}} \circ r = p_{\overrightarrow{b}} \circ r$ (même matrice B) et donc $p_{\overrightarrow{a}} = p_{\overrightarrow{b}}$. On a donc pour tout vecteur $\overrightarrow{x}$:$\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{x}$ donc $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 0$
- On a donc $d = d'$

$$\boxed{\text{L'application } J \text{ est donc injective}}$$

18.(cf figure)On a pour cet exemple $A = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_0 \end{pmatrix}$
d'après le calcul de la question 15 on a :

- $\alpha = r$ de matrice $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\beta = p_{\overrightarrow{a}} \circ r$ de matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 1 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{u'} = r(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'} = \alpha(\overrightarrow{v}) + \beta(\overrightarrow{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -y_0 - \cos(\theta) \end{pmatrix}$

19. On sait que l'application J est injective. d'après la question 17.
Montrons qu'elle est surjective:Soit $(A, B) \in G$ On cherche r et $\overrightarrow{a}$ tels que si $d = t_{\overrightarrow{a}} \circ r$ alors $J(d) = (A, B)$

- analyse :
- A est une matrice orthogonale directe ; c'est donc la matrice d'une rotation r dans une base orthonormée.
  - Soit $C = B^tA$ (la matrice de $p_{\overrightarrow{a}}$) . La matrice C est antisymétrique. En effet, comme $(A, B) \in G$, on a $({}^tA, {}^tB) \in G$ (c'est l'inverse de (A, B)), soit par la définition de G :

$$B^tA = -A^tB = -{}^t(B^tA)$$

  - Cette matrice antisymétrique est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ et donc d'après la question 7 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

- vérification

  Soit r de matrice $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, et $d=t_{\overrightarrow{a}}\circ r$. les matrices associée aux applications α et β définie dans la question 15, sont A et B.(vérifications évidentes)

$$\boxed{J \text{ est bijective de } \{\text{déplacement de } E\} \text{ dans } G}$$

20.(cf figures) Soit D invariante par d. Si D est définie par le couple $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ alors D est aussi défini par le couple $(\alpha(\overrightarrow{u}),\alpha(\overrightarrow{v})+\beta(\overrightarrow{u}))$
D'après la question 14 on a donc

$$(\alpha(\overrightarrow{u}),\alpha(\overrightarrow{v})+\beta(\overrightarrow{u}))=\pm(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$$

et donc $\alpha(\overrightarrow{u})=\pm\overrightarrow{u}$. On distingue deux cas selon que -1 est valeur propre de $\alpha=r$ ou non.

- Dans tous les cas $\alpha(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}$ est possible et $\overrightarrow{u}$ est un vecteur propre unitaire de r

  On a alors $\alpha(\overrightarrow{v})+\beta(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{v}$ or $\beta(\overrightarrow{u})=p_{\overrightarrow{a}}\circ r(\overrightarrow{u})=p_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}$. On doit donc résoudre $(r-Id)(\overrightarrow{v})=-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}$.

  Or $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Il faut donc étudier l'endomorphisme induit par r sur $\overrightarrow{u}^{\perp}$. Donc distinguer deux cas selon que 1 est valeur propre ou non de cet endomorphisme:

  - Si $\theta=0[2\pi]$ (et donc $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$ car $d\neq Id$) : $r=Id$ donc $\alpha(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{u}$ est toujours vérifié et on a $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}=(r-Id)(\overrightarrow{v})=0$; $\overrightarrow{u}$ est donc un des vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{a}$. Par contre $\overrightarrow{v}$ est quelconque (orthogonal à $\overrightarrow{u}$) .

    $$\text{si } \theta=0[2\pi] \text{ toutes les droites de direction } \overrightarrow{a} \text{ sont solutions du problème et } u=\pm\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

    dans ce cas d est une translation Le résultat peut se trouver directement.

  - Si $\theta\neq 0[2\pi]$ $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur (unitaire par hypothèse) de l'axe de la rotation ,l'endomorphisme induit sur $\overrightarrow{u}^{\perp}$ est une rotation d'angle θ qui n'a pas la valeur propre 1 , donc qui est bijective donc $\overrightarrow{v}=(Id-r)^{-1}(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u})$. On a deux vecteur unitaires $\overrightarrow{u}$ possibles qui sont opposés qui donne deux vecteurs $\overrightarrow{v}$ opposés . Il y a donc une seule droite invariante (question 14)

    $$\boxed{\text{Si } \theta\neq 0[\pi] \text{ , il existe une unique droite invariante et } \overrightarrow{u} \text{ est vecteur directeur de l'axe de la rotation}}$$

    C'est l'axe de la rotation ou l'axe du vissage.

- Si $\theta=\pi[2\pi]$ alors -1 est aussi valeur propre de r (r est une symétrie orthogonale par rapport à une droite). Outre la solution précédente on a donc aussi les solutions :

  $$r(\overrightarrow{u})=-\overrightarrow{u},(r+Id)(\overrightarrow{v})=-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}$$

  $r(\overrightarrow{u})=-\overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à l'axe de la rotation.

  Soit alors $\overrightarrow{u_1}$ un vecteur unitaire directeur de l'axe est la base orthonormée directe $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}=u,\overrightarrow{u_3})$.

  Dans cette base la matrice de r est $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ donc $(r+Id)(\overrightarrow{v})$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$ donc $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u_1}$. Donc

  - si $\overrightarrow{a}$ n'est pas orthogonal à l'axe de rotation il n'y a pas d'autre solution que l'axe du vissage.
  - si $\overrightarrow{a}$ est orthogonal à l'axe il existe des solutions et $\overrightarrow{v}$ est colinéaire à l'axe et donc $(r+id)(\overrightarrow{v})=2\overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{v}=\frac{-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}}{2}$

    Dans ce second cas il semble que d soit une rotation et que la droite invariante coupe l'axe de la rotation .Vérifions qu'il existe un point M de la droite fixe par d . On a M invariant si et seulement si $M=M'$ donc $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{a}+r(\overrightarrow{OM})$.

    Si on fait le calcul dans la base précédente en posant $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{a}$ est orthogonal à l'axe et $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

    on trouve $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}x\\ \alpha/2\\ \beta/2\end{pmatrix}$ M est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ (question 12) $=\frac{-\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{u}}{2}$. Ce qui donne $x=0$. La droite coupe l'axe au point M tel que $OM=\frac{\overrightarrow{a}}{2}$.

    si $\theta=\pi[2\pi]$ alors
    si $\overrightarrow{a}$ n'est pas orthogonal à l'axe de la rotation une seule solution et $\overrightarrow{u}$ est vecteur directeur de
    si $\overrightarrow{a}$ est orthogonal à l'axe on a aussi toute les droites qui coupent l'axe à angle droit.

Remarque : sans conviction pour la fin de ce cas particulier car il faut vraiment bien se souvenir des vissages et des rotations pour deviner la réponse puis la prouver.

21. a) Supposons $\theta \neq 2\pi$. Par la question précédente on a (au signe près) $\overrightarrow{u} = k$ et $\overrightarrow{v} = A(\overrightarrow{v}) + B(\overrightarrow{u})$. Ce qui donne

$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$. La droite D invariante par d a pour équation

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Si $\theta = 2\pi$ $(A = I)$, $d = t_{\overrightarrow{a}}$ et $t_{\overrightarrow{a}}(D) = D$ si et seulement si D admet $\overrightarrow{a}$ comme vecteur directeur. (solution non unique , contrairement au sujet)

Le sujet annonce un isomorphisme de groupe et prouve seulement qu'il existe une bijection. A vous de vérifier en prime que cette bijection est un morphisme de groupe.