ESIM 1999
Option PSI
Math 1

Le problème pose de façon classique un produit scalaire sur les polynôme , et en donne un exemple d'application au calcul approché d'une intégrale.

Préliminaires:

Dans tout le problème on utilisera des intégrales du type $\int_{]a,b[} \phi(x)w(x)dx$. Montrons une bonne fois pour toute que si ϕ est continue sur le segment $[a,b]$ alors ϕw est intégrable sur l'ouvert $]a,b[$:

- ϕw est continue sur $]a,b[$ comme produit de fonctions continues
- ϕ est continue sur le segment donc ϕ y est bornée ; posons $M = \sup_{]a,b[} |\phi|$. On a alors $|\phi w| \leq Mw$. La fonctions w étant intégrable sur $]a,b[$, la fonction ϕw y est intégrable par majoration.

On vérifie que (f,g) est bien un produit scalaire :

- d'après la remarque précédente $\int_{]a,b[} f(x)g(x)w(x)dx$ est bien définie et c'est un réel:
- L'intégrale étant linéaire $f \to \int_{]a,b[} f(x)g(x)w(x)dx$ est linéaire
$$(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (f_1,f_2) \in C([a,b],\mathbb{R}), \int_{]a,b[} (\lambda f_1 + \mu f_2)\, gwdx = \lambda \int_{]a,b[} f_1 gwdx + \mu \int_{]a,b[} f_2 gwdx$$
- le produit étant commutatif $(f,g) = (g,f)$
- par symétrie et linéarité à gauche , on a bilinéarité.
- on a une forme définie positive : w étant strictement positive , f^2w est une fonction positive , donc l'intégrale est positive. De plus si f est non nulle f^2w est strictement positive en un point x_0. On sait que l'intégrale sur un segment d'une fonction continue, positive, strictement positive en un point est strictement positive (Théorème de positivité stricte). Donc pour tout segment J contenant x_0 on a $\int_J f^2(x)w(x)dx > 0$ et comme $\int_{]a,b[} f^2(x)w(x)dx \geq \int_J f^2(x)w(x)dx > 0$ on a $\int_{]a,b[} f^2(x)w(x)dx > 0$ si $f \neq 0$
- De plus $(fh,g) = (f,gh) = \int_{]a,b[} f(x)g(x)h(x)w(x)dx$

Partie A :

1. En s'inspirant de la méthode de Schmidt , on calcule par récurrence la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   - $p_0 = 1$ est donné par le sujet , il est donc unique.
   - p_1 doit être un polynôme normalisé de degré 1 orthogonal aux constantes:On a donc $p_1 = X + a$ tel que $(p_1,p_0) = 0$ soit $(x,p_0) + a\,(p_0,p_0) = 0$ donc $a = -\frac{(x,p_0)}{(p_0,p_0)}$. p_1 est unique.
   - supposons qu'il existe une unique famille $(p_k)_{k=0}^{n-1}$ vérifiant pour $1 \leq k < n$:
   $$\begin{cases} d^\circ(p_k) = k \\ p_k \text{ est un polynôme nomalisé} \\ \forall q \in \mathbb{R}_{[k-1]}[X]\ ,\ (p_k,q) = 0 \end{cases}$$

   comme p_n est normalisé $p_n(x) = x^n + r_n(x)$ avec $r_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme les $(p_k)_{k=0}^{n-1}$ sont échelonnés en degré , il forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Donc :
   si p_n existe il existe des $(\lambda_i)_{i=0}^{n-1}$ tels que $p_n = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k p_k$.
   Par linéarité à droite du produit scalaire l'égalité $(p_n,q) = 0$ est vraie pour tout polynôme q de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ si et seulement si elle est vraie pour une base. L'existence et l'unicité de p_n est donc équivalente à l'existence et à l'unicité dune solution du système :
   $$\forall i \in [[0,n-1]], \left(x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k p_k, p_i\right) = 0$$
   Or pour $i \neq k$ $(p_i,p_k) = 0$ (car $d^\circ(p_i) < k$ ou $d^\circ(p_k) < i$). Le système est donc équivalent à:
   $$\forall i \in [[0,n-1]], (x^n,p_i) + \lambda_i(p_i,p_i) = 0$$
   d'où :
   $$\boxed{p_n = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x^n,p_k)}{(p_k,p_k)} p_k}$$
   avec unicité de la solution

2. Soit $q_n = p_n - xp_{n-1}$. q_n est de degré au plus $n-1$ comme différence de deux polynômes normalisés de degré n. On peut donc décomposer q dans la base $(p_k)_{k=0}^{n-1}$:
$$q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k p_k$$
on a alors pour tout $i \leq n-1$ $(q_n, p_i) = \lambda_i (p_i, p_i)$. Mais on a aussi
$$(q_n, p_i) = (p_n, p_i) - (xp_{n-1}, p_i) = -(xp_{n-1}, p_i) = -(p_{n-1}, xp_i)$$
d'après la remarque du préliminaire. On a :

- pour $i \leq n-3$, $(p_{n-1}, xp_i) = 0$ car $d^\circ(xp_i) \leq n-2$ donc $\lambda_i = 0$
- pour $i = n-2$ et $i = n-1$
$$\lambda_i = \frac{-(p_{n-1}, xp_i)}{(p_i, p_i)}$$
$$\boxed{p_n - xp_{n-1} = \lambda_n p_{n-1} + \mu_n p_{n-2} \text{ avec } \lambda_n = -\frac{(p_{n-1}, xp_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} \text{ et } \mu_n = -\frac{(p_{n-1}, xp_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}}$$
- *Remarque : Il y a plusieurs autres façons d'exprimer le résultat : par exemple :*
$$\mu_n = -\frac{(p_{n-1}, xp_{n-2})}{(p_{n-2}, p_{n-2})} = -\frac{(p_{n-1}, x^{n-1})}{(p_{n-2}, p_{n-2})}$$

3. Procédons par l'absurde pour prouver qu'il existe n racines sur $]a, b[$ puis qu'elles sont simples:

- d'après le degré p_n admet au plus n racines. supposons que p_n admettent $k < n$ racines $(x_i)_{i=1}^k$ sur $]a, b[$. On pose $q = \prod_{i=1}^k (x - x_i)$ et $p_n = qr$,r étant un polynôme n'ayant pas de racines sur $]a, b[$. On considère alors le produit scalaire (q, p_n) :
  - d'une part $(q, p_n) = 0$ car $d^\circ(q) < n$.
  - D'autre part $(q, p_n) = \int_{]a,b[} q^2 r$. Or r étant continue et n'ayant pas de racine est de signe constant sur $]a, b[$ et n'est pas toujours nul (un polynôme a un nombre fini de racines). Donc $q^2 r$ est continue positive strictement positive en un point ou continue négative , strictement négative en un point. Dans les deux cas $\int_{]a,b[} q^2 r \neq 0$.
  - Absurde : il existe n racines distinctes ou non sur $]a, b[$
- Supposons maintenant qu'il existe une racine multiple x_i. alors $q = \frac{p_n}{(x-x)^2}$ est un polynôme de degré $< n$ tel que $pq = \left(\frac{p}{x-x_i}\right)^2$ soit continue positive strictement positive en un point. Le même raisonnement conduit à une absurdité.
$$\boxed{p_n \text{ possède } n \text{ racines distinctes sur }]a, b[}$$

4. a)Remarquons que la fonction w proposée est continue strictement positive sur $]-1, 1[$. Si elle est bien intégrable on pourra utiliser les questions précédentes.
Or $w(x) \sim_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1-x)^{1/2}}$. Comme $1/2 < 1$ la fonction continue positive w est intégrable sur $[0, 1[$
et $w(x) \sim_{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(1+x)^{1/2}}$. Comme $1/2 < 1$ la fonction continue positive w est intégrable sur $]-1, 0]$
$$\boxed{w \text{ est intégrable sur }]-1, 1[\text{ et y vérifie les hypothèses du préliminaaire}}$$
De plus $\int_{]-1,1[} w(x)dx = [\arcsin(x)]_{-1}^{1} = \pi$
b)Pour $x \in [-1, 1]$ on peut prendre θ réel tel que $t_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta)$. De la formule de trigonométrie
$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$$
on déduit
$$\boxed{\forall x \in [-1, 1], t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x)}$$
On montre alors par récurrence :
$$\forall n \geq 1, t_n(x) = 2^{n-1}x^n + s_n(x) \text{ , } d^\circ(s_n) < n$$
Remarque : la formule est fausse pour $n = 0$

- Pour $n = 1$, $t_n(x) = x$. La formule est vraie avec $s_1 = 0$

- Si $t_n(x) = 2^{n-1}x^n + s_n(x)$ alors $t_{n+1}(x) = 2^n x^{n+1} + (2xs_n(x) - 2^{n-2}x^{n-1} - s_{n-1})$. La parenthèse est une somme de polynômes de degré $< n$. C'est un polynôme s_{n+1} de degré $< n$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, t_n(x) = 2^{n-1}x^n + s_n(x)\ ,\ d^\circ(s_n) < n}$$

c)En posant le changement de variable $u = \arccos(x)$ qui est C^1 sur tout segment $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ on a :

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} t_n(x)t_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\arccos(-1+\varepsilon)}^{\arccos(1-\varepsilon)} \cos(nu)\cos(ku)\frac{-\sin(u)du}{\sqrt{1-\cos^2(u)}}$$

or sur l'intervalle d'intégration le sin est positif. Donc

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} t_n(x)t_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\arccos(1-\varepsilon)}^{\arccos(-1+\varepsilon)} \cos(nu)\cos(ku)du$$

La fonction de u est continue sur $[0,\pi]$, la primitive est donc continue sur $[0,\pi]$

$$\int_{]-1,1[} t_n(x)t_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos(nu)\cos(ku)du = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos\left((n+k)u\right) + \cos\left((n-k)u\right)\right)du$$

$$\boxed{\int_{]-1,1[} t_n(x)t_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^\pi 2du = \pi \text{ si } n = k = 0 \\ \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2nu)+1)\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nu)}{2n} + u\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} \text{ si } n = k \neq 0 \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+k)u)}{n+k} + \frac{\sin((n-k)u)}{n-k}\right]_0^\pi = 0 \text{ si } n \neq k \end{cases}}$$

d) $(t_k)_{k=0}^n$ est donc une base échelonnée en degré de $\mathbb{R}[X]$, vérifiant :$d^\circ(q) < k \Rightarrow (q, t_k) = 0$. En posant

$$\boxed{\begin{cases} p'_0 = t_0 \\ p'_n = 2^{1-n}t_n\ ,\ \forall n \geq 1 \end{cases}}$$

on construit une base de polynôme vérifiant les trois conditions de la question A1. Par unicité de cette solution $(p'_n) = (p_n)$

e)Les racines de p_n sont celles de t_n et elles sont toutes sur $]-1,1[$ d'après A3. On peut donc résoudre $p_n(x) = 0$ en posant $\theta = \arccos(x)$. On a alors $\cos(n\theta) = 0$ donc $\theta = \frac{\pi}{2} + i\pi$. Ce qui donnent les racines $\cos\left(\frac{\pi+2i\pi}{n}\right)$, qui sont deux à deux distinctes si on impose $i \in [[0, n-1]]$

$$\boxed{\text{les racines de } p_n \text{ sont les } x_i = \frac{\pi+2i\pi}{2n}\ ,\ i \in [[0, n-1]]}$$

Partie B:

1. On reconnaît les polynômes d'interpolation de Lagrange.

a)$Q(x) - \sum_{i=0}^k Q(x_i)l_i(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à k et ayant $k+1$ racines 2 à 2 distinctes (les x_i) donc :

$$\boxed{Q(x) = \sum_{i=0}^k Q(x_i)l_i(x)}$$

En intégrant on a par linéarité (toutes les intégrales sont définies à cause de la remarque du préliminaire)

$$\int_{]a,b[} Q(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^k \left(\int_{]a,b[} l_i(x)w(x)dx\right) Q(x_i)$$

b)Pour P de degré inférieur ou égal à $2k+1$, on écrit par division euclidienne $P = Q_1 p_{k+1} + Q_2$ avec $d^\circ(Q_2) \leq k$ et $d^\circ(Q_1) \leq k$ à cause du degré de P. On a donc :

$$\int_{]a,b[} P(x)w(x)dx = \int_{]a,b[} Q_1(x)p_{k+1}(x)w(x)dx + \int_{]a,b[} Q_2(x)w(x)dx$$

or par définition de p_{k+1} si $d^\circ(q) \leq k$ $\int_{]a,b[} q(x)p_{k+1}(x)w(x) = 0$. donc :

$$\int_{]a,b[} P(x)w(x)dx = \int_{]a,b[} Q_2(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^k \lambda_i Q_2(x_i)$$

car $d^\circ(Q_2) \leq k$. Mais les x_i sont racines de p_{k+1} donc $Q_2(x_i) = P(x_i)$

$$\boxed{\int_{]a,b[} P(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P(x_i)}$$

c)$l_j(x)$ est un polynôme de degré $2k$. On peut donc lui appliquer la question précédente :

$$\int_{]a,b[} l_j(x)^2 w(x)dx = \sum_{i=0}^{k} \lambda_j l_j(x_i)^2 = \lambda_j$$

comme dans le préliminaire par intégration d'une fonction continue positive , non nulle on a

$$\boxed{\forall j \in [0,k] \ , \lambda_j > 0}$$

2. *Bien suivre le changement de notations les $\mu_i^{(k)}$ sont les λ_i précédents , indexés aussi par k car maintenant k varie.*

   a)En appliquant la relation (2) on a directement :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{k} \mu_i^{(k)} = \int_{]a,b[} w(x)dx}$$

b)*Remarque : que vient faire ici cette fonction continue alors que tout le reste du problème a étudié des polynômes. Comment déduire des propriétés des polynômes celles des fonctions. Mais bien sur c'est une méthode "classique". Le théorème de Weierstrass permet de passer des polynômes aux fonctions continues :*

f est une fonctions continues sur le segment $[a,b]$, il existe donc une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f uniformément sur $[a,b]$. Or d'après la question 1 $E_k(P_n) = 0$ dès que $d^\circ(P_n) \leq 2k+1$ soit $k \geq \frac{d^\circ(P_n)-1}{2}$
Or

$$E_k(f) - E_k(P_n) = \int_{]a,b[} (P_n - f)(x)w(x)dx - \sum_{i=0}^{k} \mu_i^{(k)} (P_n(x_{i,k}) - f(x_{i,k}))$$

On a donc pour $k \geq \frac{d^\circ(P_n)-1}{2}$ en notant $\|P_n - f\|_\infty = \sup_{[a,b]}(|P_n - f|)$

$$|E_k(f)| \leq \int_{]a,b[} \|P_n - f\|_\infty w(x)dx + \sum_{i=0}^{k} \left|\mu_i^{(k)}\right| \|P_n - f\|_\infty = 2\|P_n - f\|_\infty \int_{]a,b[} w(x)dx$$

car les $\mu_i^{(k)}$ sont positifs (question B1c) de somme $\int_{]a,b[} w(x)dx$ d'après le calcul précédent.

Par convergence uniforme de la suite de polynômes, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un n tel que

$$\|P_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2\int_{]a,b[} w(x)dx}$$

on a donc pour $k \geq \frac{d^\circ(P_n)-1}{2}$, $|E_k(f)| \leq \varepsilon$

$$\boxed{\text{la suite } E_k(f) \text{ tend vers } 0}$$

3.

   a)C'est la question A4e : $\theta_i = \cos\left(\frac{\pi+2i\pi}{2(k+1)}\right)$

4. b)On sait que $\lambda_i = \int_0^\pi l_i(x)w(x)dx$. On va donc chercher c tel que $l_i(x) = c\frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i}$.

   comme x_i est racine de t_{k+1}, $a(x) = \frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i}$ est un polynôme de degré k , donc d'après B1

$$a(x) = \sum_{j=0}^{k} a(x_j)l_i(x)$$

Pour $j \neq i$, $a(x_j) = \frac{t_{k+1}(x_i)}{x_j - x_i} = 0$ et $a(x_i) = \lim_{x\to x_i} \frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i} = t'_{k+1}(x_i)$. Il reste donc :

$$\frac{t_{k+1}(x_j)}{x_j - x_i} = t'_{k+1}(x_i)l_i(x)$$

$$\boxed{\lambda_i = \frac{1}{t'_{k+1}(x_i)} \int_{]-1,1[} \frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Remarque : Soyons honnête je n'est trouvé cette solution élégante qu'après avoir trouvé le résultat par une méthode plus calculatoire :

$$l_i(x) = \prod_{j\neq i}(x-x_j)\frac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$$

puis en écrivant $t_{k+1}(x) = 2^k\prod_j(x-x_j) = 2^k(x-x_i)\prod_{j\neq i}(x-x_j)$ *et en dérivant*

$$t'_{k+1}(x) = 2^k\prod_{j\neq i}(x-x_j) + 2^k(x-x_i)\frac{d}{dx}\left(\prod_{j\neq i}(x-x_j)\right)$$

la valeur en x_i *donne alors l'expression voulue.*

c) Il y a un problème d'intégrabilité : $\theta \to \frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_i)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_i)}$ est clairement continue sur $[0,\pi]-\{\theta_i\}$. Pour vérifier qu'il n'y a pas de problème en θ_i car la fonction se prolonge par continuité on écrit en utilisant $f(x)-f(x_0)\sim_{x_0} f'(x_0)(x-x_0)$ si $f'(x_0)\neq 0$:

$$\frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_i)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_i)} \sim \frac{j(\theta-\theta_i)\sin(j\theta_i)}{(\theta-\theta_i)\sin(\theta_i)} \sim \frac{j\sin(j\theta_i)}{\sin(\theta_i)} \text{ car } \sin(\theta_i)\neq 0$$

- $a_{i,0} = \int_0^\pi 0 = 0$, $a_{i,1} = \int_0^\pi 1 = \pi$
-
$$\begin{aligned}
a_{i,j+1}+a_{i,j-1} &= \int_0^\pi \frac{(\cos((j+1)\theta)+\cos((j-1)\theta)) - (\cos((j+1)\theta)+\cos((j-1)\theta))}{\cos(\theta)-\cos(\theta_i)}d\theta \\
&= 2\int_0^\pi \frac{\cos(j\theta)\cos(\theta)-\cos(j\theta_i)\cos(\theta_i)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_i)}d\theta = 2\int_0^\pi \cos(j\theta)+\cos(\theta_i)\frac{\cos(j\theta)-\cos(j\theta_i)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_i)}d\theta \\
&= 2\int_0^\pi \cos(j\theta)d\theta + 2\cos(\theta_i)a_{i,j} = 2\cos(\theta_i)a_{i,j} \text{ car } j\neq 0
\end{aligned}$$
- Comme le calcul qui suit passe dans les complexes , je change de notation en posant $u_j = a_{p,j}$. La suite (u_p) est une suite récurrente d'ordre 2 vérifiant : $\begin{cases} u_{j+1}-2\cos(\theta_p)u_j+u_{j-1}=0 \\ u_0=0, u_1=\pi \end{cases}$

  L'équation caractéristique $r^2-2r\cos(\theta_i)+1=0$ admet les deux racines $\exp(i\theta_p)$ et $\exp(-i\theta_p)$ qui sont distinctes car $\sin(\theta_p)\neq 0$. On a donc $u_j = \lambda\exp(ij\cos(\theta_p)+\upsilon\exp(-ij\theta_p)$. Le système obtenue en prenant $j=0$ et $j=1$ donne :

$$u_j = \frac{\pi}{\sin(\theta_p)}\sin(j\pi_p)$$

  En revenant aux notations du sujet :

$$\boxed{a_{i,j} = \frac{\pi}{\sin(\theta_i)}\cos(j\theta_i)}$$

d)On sait dojo que $\lambda_i = \frac{1}{t'_{k+1}(x_i)}\int_{]-1,1[}\frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Il faut donc calculer les deux morceaux de l'expression:

- $t'_{k+1}(x_i)$:

$$t_{k+1}(x) = \cos((k+1)\arccos(x))$$

  Si on dérive cette relation :

$$t'_{k+1}(x) = (k+1)\frac{\sin((k+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

  Donc comme $\sin(\theta_i)>0$:

$$t'_{k+1}(x_i) = (k+1)\frac{\sin((k+1)\theta_i)}{\sin(\theta_i)}$$

- $\int_{]-1,1[}\frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$: Comme dans la question $A4$ on effectue le changement de variable $\theta=\arccos(x)$ et comme $\cos((k+1)\theta_i)=0$ par définition des θ_i :

$$\int_{]-1,1[}\frac{t_{k+1}(x)}{x-x_i}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \frac{\cos((k+1)\theta_i)}{\cos(\theta)-\cos(\theta_i)}d\theta = a_{i,k+1} = \pi\frac{\sin((k+1)\theta_i)}{\sin(\theta_i)}$$

- synthèse :

$$\boxed{\forall i\in[[0,k]]\ ,\ \lambda_i = \frac{\pi}{k+1}}$$