CENTRALE MP 2002
Math 2
première partie

A1) On peut constater que Q_0 est invariant par $x->-x$, par $y->-y$, par $z->-z$. Donc Q_0 est invariant par symétrie par rapport aux trois plans P_i, P_j, P_k donc aussi en composant ces symétries par les symétries par rapport à D_i, D_j, D_k et la symétrie par rapport à O .
A2) le plan P_j à l'équation $y=0$, L'intersection est donc la courbe $x^2-z^2=0$. Il s'agit donc des deux droites d'équations $z=x$ et $z=-x$.
A3) La matrice dans la base (i,j,k) de la rotation est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est donc $\begin{pmatrix} x\cos(\theta)-y\sin(\\ x\sin(\theta)+y\cos(\\ z \end{pmatrix}$. on doit donc montrer

$$x^2+y^2-z^2=0 \Rightarrow (x\cos(\theta)-y\sin(\theta))^2+(x\sin(\theta)+y\cos(\theta))^2+z^2=0$$

Ce qui se vérifie sans problème par développement.
On a donc $R_\theta(Q_0)\subset Q_0$.
Or R est bijective donc en composant par $R_{-\theta}$ on a $Q_0\subset R_{-\theta}(Q_0)$. Et comme la propriété est vrai pour tout angle θ on peut l'appliquer à l'angle $-\theta$ et donc :

$$\boxed{R_\theta(Q_0)=Q_0}$$

A4) La surface est donc obtenue en faisant tourner autour de Oz les droites obtenues au A2:C'est un cône de révolution d'axe Oz (et d'angle au sommet $\pi/4$)
B1) L'identité , la symétrie par rapport à O ...
B2)

- D_k est invariant par ϕ et $k\in D_k$, donc $\phi(k)\in D_k$.
- De plus $\phi\in O(E)$ donc $\phi(k)$ est un vecteur normé de D_k . donc $\phi(k)=\pm k$
- On a donc deux cas possibles :
  - $\phi(k)=k$: D_k est l'axe de la rotation et réciproquement toute rotation d'axe D_k convient.
  - $\phi(k)=-k$ et donc ϕ est une rotation d'axe u tel que $\langle u/k\rangle=\langle\phi(u)/\phi(k)\rangle=-\langle u/k\rangle$. Donc $u\perp k$. Et ϕ_k est une rotation d'axe horizontale et d'angle π.

B3) On peut remarquer que en dimension 3 $\det(-\phi)=(-1)^3\det(\phi)=-\det(\phi)$ Donc ϕ est directe si et seulement si $-\phi$ est indirecte. de plus D_k est invariant par la bijection $-Id$, donc ϕ laisse D_k invariante si et seulement si $-\phi$ laisse D_k invariante.
Donc tout élément de K est soit direct (et il est alors dans K^+) soit indirect (et son opposé est dans K^+)
C1) critère de sous groupe :

- K_0 est un sous ensemble du groupe $O(E)$ (pour la composition $\circ$)
- K_0 contient l'élément neutre Id
- K_0 est stable par passage à l'inverse : Si σ est dans K_0 , σ est bijective et $\sigma(Q_0)=Q_0\Rightarrow\sigma^{-1}(\sigma(Q_0))=\sigma^{-1}(Q_0)=Q_0$ et donc $\sigma^{-1}(Q_0)=Q_0$.

  Remarque : l'hypothèse bijective est importante pour une application non bijective l'image réciproque ne vérifie pas $\forall X$: $f^{-1}\langle f(X)\rangle=X$: *Si* $f: x->x^2$ *dans* $\mathbb{R}$ $f^{-1}\langle f(\mathbb{R}^+)\rangle=\mathbb{R}$
- K_0 est stable par composition : si $\sigma(Q_0)=Q_0$ et $\phi(Q_0)=Q_0$ alors

$$\sigma\circ\phi(Q_0)=\sigma(\phi(Q_0))=\sigma(Q_0)=Q_0$$

$$\boxed{K_0 \text{ est un sous groupe de } O(E)}$$

C2) :

- On compose deux endomorphismes orthogonaux directs . Le composé est un endomorphisme orthogonale direct. On peut remarquer que $R_\theta\circ S_i(k)=-k$. En reprenant l'analyse de B2) $R_\theta\circ S_i(k)$ est donc une rotation d'angle π et d'axe v orthogonal à k .

  Pour cherche v on pose $v=xi+yj$, $R_\theta\circ S_i(v))=R_\theta(xi-yj)=(\cos(\theta)x+\sin(\theta)y)\,i+(\sin(\theta)x-\cos(\theta)\,y)\,j$.

On a donc $R_\theta \circ S_i(v) = v$ ssi $\left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta)x + \sin(\theta)y = x \\ \sin(\theta)x - \cos(\theta)\,y = y \end{array} \right.$

On doit donc résoudre $\left\{ \begin{array}{l} (\cos(\theta) - 1)\,x + \sin(\theta)y = 0 \\ \sin(\theta)x - (\cos(\theta) + 1)\,y = 0 \end{array} \right.$. Le système n'est pas de Cramer (son déterminant est nulle) et est de rang 1 (l'un des coefficients diagonaux est non nul) . L'ensemble des solutions est donc la droite engendrée par $\begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = 2\cos(\theta/2) \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$.

$$\boxed{R_\theta \circ S_i \text{ est la rotation d'angle } \pi \text{ autour de } v = \cos(\theta/2)\,i + \sin(\theta/2)\,j}$$

On peut trouver de façon équivalente $v = -\cos(\theta/2)\,i - \sin(\theta/2)\,j$

Pour la suite on a besoin d'une réciproque . Si R est une rotation d'angle π et d'axe u horizontal alors si on pose $(i, u) = t$ on vérifie que $R = R_{2t} \circ S_i$.

Autre méthode : Si on passe par les matrices on calcule

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

puis on cherche l'axe et l'angle par la méthode classique.

- Tout élément de K^+ est soit une rotation d'axe D_k , soit une rotation d'angle π et d'axe $u \perp k$.

  Dans le premier cas la rotation R_θ laisse Q_0 invariant d'après A3.

  Dans le second cas si $(i, u) = t$, la question C2a) montre que la rotation d'axe u et d'angle π est le composé de R_{2t} et de S_i qui laissent Q_0 invariant (questions A3 et A1). Donc d'après $C1$ Q_0 est invariant par le composé. Donc

$$K^+ \subset K_0$$

- $-Id$ la symétrie par rapport à 0 laisse aussi Q_0 invariant. Donc par composition $K^- \subset K_0$. Et par union

$$\boxed{K \subset K_0}$$

C3)

- Si v est un vecteur de Q_0 de norme $\sqrt{2}$ on a les deux relations :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ et } x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

  en retranchant les deux relations on a $z^2 = 1$. Or $z = \langle z/k \rangle$ Donc $\langle z/k \rangle^2 = 1$

- Si u est un vecteur unitaire de P_k il existe t tel que $u = \cos(t)\,i + \sin(t)$, On vérifie alors que pour $u + k$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix}$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. $u + k \in Q_0$, donc $\phi(u + k) \in Q_0$. De plus

$$\begin{array}{rcl} \|\phi(u+k\|^2 & = & \|u+k\|^2 \text{ endomorphisme orthogonal} \\ & = & \|u\|^2 + \|k\|^2 \text{ vecteurs orthogonaux} \\ & = & 2 \end{array}$$

  donc d'après C3a $\langle \phi(u + k)/k \rangle^2 = 1$

- de la même façon $\langle \phi(u - k)/k \rangle^2 = 1$

  or

$$\langle \phi(u+k)/k \rangle^2 = (\langle \phi(u)/k \rangle + \langle \phi(k)k \rangle)^2 = \langle \phi(u)/k \rangle^2 + 2\langle \phi(u)/k \rangle \langle \phi(k)/k \rangle + \langle \phi(k)/k \rangle^2$$

  et de même

$$\langle \phi(u-k)/k \rangle^2 = (\langle \phi(u)/k \rangle - \langle \phi(k)k \rangle)^2 = \langle \phi(u)/k \rangle^2 + 2\langle \phi(u)/k \rangle \langle \phi(k)/k \rangle - \langle \phi(k)/k \rangle^2$$

  Or ces deux quantités sont égales , donc leur différence est nulle et par simplification par 4

$$\langle \phi(u)/k \rangle \langle \phi(k)/k \rangle = 0$$

- Supposons par l'absurde : $\langle \phi(k)/k \rangle = 0$ (ce qui veut dire que $\phi(k)$ est orthogonal k)

  On reprend $\langle \phi(u)/k \rangle^2 + 2\langle \phi(u)/k \rangle \langle \phi(k)/k \rangle + \langle \phi(k)/k \rangle^2 = 1$ il reste $\langle \phi(u)/k \rangle^2 = 1$.

  ϕ étant un endomorphisme orthogonal $\|\phi(u)\| = 1$ On a donc $\langle \phi(u)/k \rangle^2 = \|\phi(u)\|^2 \|k\|^2$. On a donc égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz . Les deux vecteurs sont donc colinéaires. $\phi(u)$ est colinéaire à u , et donc à cause de la norme $\phi(u) = \pm k$.

  Or u est quelconque dans P_k . On a donc une infinité de vecteurs u possible pour seulement deux images possibles . ϕ ne peut pas être bijective . ABSURDE car tout endomorphisme orthogonal est bijectif.

- On a donc $\langle \phi(k)/k \rangle \neq 0$ et donc d'après IC3b : $\langle \phi(u)/k \rangle = 0$. $\phi(u) \in P_k$.

  On a donc $\phi(P_k) \subset P_k$, et comme ϕ est un automorphisme de E $\phi(P_k) = P_k$, les deux espaces ayant même dimension.

C4) Si ϕ est un élément quelconque de K_0 , ϕ laisse donc P_k invariant . Or ϕ conserve l'orthogonalité donc $D_k = P_k^\perp$ est aussi invariant par ϕ . Donc $\phi \in K$.
L'autre inclusion a été prouvé au IC2

$$\boxed{K = K_0}$$

L'ensemble des rotations laissant le cône Q_0 invariant sont les rotations d'axe D_k et d'angle quelconque et les rotation d'axe horizontal et d'angle π. Les endomorphismes orthogonaux indirects laissant ce cône invariant sont obtenus par composition de ces rotations et de la symétrie par rapport à O .