I.A - Exemples

I.A.1) Soit $f(x) = kx^2$ avec $k > 0$ et $I = \mathbb{R}$.On a donc $f_p(x) = px - kx^2$ fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'_p(x) = p - 2kx$,pour tout p réel f_p est maximum si $x = \frac{p}{2k}$ et le maximum vaut $\frac{p^2}{4k}$. Il en résulte que $J(f) = \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(f) : p \to \frac{p^2}{4k}$. Le graphe est celui d'une parabole d'axe vertical.
I.A.2.) Soit $f(x) = e^x$ et $I = \mathbb{R}$.On a $f_p(x) = px - e^x$ fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $p - e^x$
Pour $p < 0$, f_p décroît sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} f_p(x) = +\infty$ donc $p \notin J(f)$
Pour $p = 0$, f_p décroît sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} f_p(x) = 0$ donc $0 \in J(f)$ et $g(0) = 0$
Pour $p > 0$, f_p est maximum pour $x = \ln(p)$ donc $p \in J(f)$ et $g(p) = p\ln(p) - p$

Il en résulte que $J(f) = \mathbb{R}^+$ et $\mathcal{L}(f) : p \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0 \\ p\ln(p) - p & \text{si } p > 0 \end{cases}$
g est continue en 0 car $\lim_0 (p\ln(p)) = 0$ et g est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $\ln(p)$. Donc g décroît sur $[0, 1]$ puis croît sur $[1, +\infty[$. En $p = 0$ $\frac{g(p)}{p}$ tend vers $-\infty$ (donc tangente verticale) et si p tend vers $+\infty$ $\frac{f(p)}{p}$ tend vers $+\infty$ donc branche parabolique verticale.
I.A.3) Soit $f(x) = \arctan(x)$ et $I = \mathbb{R}$. f_p est C^1 de dérivée $p - \frac{1}{1+x^2}$ mais ici une étude précise des variations est inutile car on a presque toujours une limite égale à $+\infty$:

$$\begin{array}{c} \text{si } p < 0 \text{ alors } \lim_{x\to-\infty} d(x) = +\infty \\ \text{si } p > 0 \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} d(x) = +\infty \\ \text{si } p = 0\ f_p \text{ décroit de } -\pi/2 \text{ à } +\pi/2 \end{array}$$

$$\boxed{J(f) = \{0\} \text{ et } \mathcal{L}(f)(0) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (-\arctan(x)) = \frac{\pi}{2}.}$$

I.B - Etude générale : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $J(f) \neq \emptyset$.

I.B.1) Pour a et b dans $J(f)$ et $t \in [0, 1]$, on a $f_{ta+(1-t)b}(x) = tf_a(x) + (1 - t)f_b(x) \leq tg(a) + (1 - t)g(b)$ (car $t \geq 0$ et $1 - t \geq 0$) , ainsi la fonction $f_{ta+(1-t)b}$ est majorée sur I et donc $ta + (1 - t) \in J(f)$.
Tout réel compris entre a et b est élèment de $J(f)$.

$$\boxed{J(f) \text{ est un intervalle.}}$$

I.B.2) C'est la définition barycentrique de la convexité qui vous est proposée
Avec les hypothèse de I.B.1), on a

$$\forall x \in I, \quad f_{ta+(1-t)b}(x) \leq tg(a) + (1 - t)g(b)$$

ainsi $g(ta + (1 - t)b) \leq tg(a) + (1 - t)g(b)$.
Il en résulte que $\underline{g = \mathcal{L}(f) \text{ est une fonction convexe sur } J(f)}$.
Remarque :
Les graphes du I.A sont-ils bien convexes ?
I.B.3)

a) Si $I \subset \mathbb{R}^+$, pour $p \leq q$ et $x \in I$, on a $px < qx$ et donc $f_p(x) \leq f_q(x)$. Soit en prenant les bornes supérieures $g(p) \leq g(q)$.

$$\boxed{g = \mathcal{L}(f) \text{ est donc une fonction croissante sur } J(f).}$$

b) Si $I \subset \mathbb{R}^-$, pour $p \leq q$ et $x \in I$, on a $f_p(x) \geq f_q(x)$. $\underline{g = \mathcal{L}(f) \text{ est donc une fonction décroissante sur } J(f)}$.

I.C - Etude d'un cas particulier

Soit $f \in C^2(I, \mathbb{R})$ telle que: $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$. On note α et β les extrémités de l'intervalle $f'(I)$.
I.C.1) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, la fonction f_p a pour dérivée $f'_p(x) = p - f'(x)$. f" étant strictement positive , f' est strictement croissante sur I, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x \in I$ tel que $f'(x) = p$, De plus f'_p est strictement décroissante . Donc f_p croît sur $]\alpha, x]$ et décroît sur $[x, \beta[$. f_p admet sur $]\alpha, \beta[$ un plus grand élément $f_p(x)$. p est élément de $J(f)$ et $g(p) = f_p(x)$

$$\boxed{]\alpha, \beta[\subset J(f) \text{ et } \forall p \in]\alpha, \beta[, \quad g(p) = px(p) - f(x(p)) \text{ en posant } x(p) = (f')^{-1}(p).}$$

I.C.2) Par hypothèse f' est continue , strictement croissante de $\mathring{I}$ sur $]\alpha, \beta[$donc f'^{-1} est continue strictement croissante sur $]\alpha, \beta[$. de plus f' est C^1 et $(f')'$ n'a pas de racine sur $]\alpha, \beta[$ donc $x = (f')^{-1}$ est C^1 sur $]\alpha, \beta[$ et $x'(p) = \frac{1}{f"(x(p))}$. Et donc par composition (l'image de x est bien incluse dans I) et produit g est C^1 et

$$\forall p \in]\alpha, \beta[, \quad g'(p) = x(p) + \frac{p}{f"(x(p))} - \frac{f'(x(p))}{f"(x(p))} = x(p) \text{ car } f' \text{ et } x \text{ sont deux fonctions réciproques.}$$

I.C.3) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, la tangente D_p au point d'abscisse $x(p)$ au graphe de f a pour équation

- $y - f(x(p)) = f'(x(p))(x - x(p))$. Et comme $f'(x(p)) = p$, on a:

$$\boxed{y = px - g(p)}$$

I.C.4) On note $\mathcal{H} = \{h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) > 0 \text{ et } h'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$.
a) Soit $h \in \mathcal{H}$ et $g = \mathcal{L}(h)$.

- D'après I.C.1), on a $J(h) = \mathbb{R}$ et d'après I.C.2), on a $\forall p \in \mathbb{R}$, $g'(p) = x(p)$, .Donc g est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $g"(p) = x'(p) = \frac{1}{f"(x(p))} > 0$.

  Il en résulte que $g \in \mathcal{H}$ et donc $\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}}$.

b) Soit $h \in \mathcal{H}$ et $g = \mathcal{L}(h)$. D'après a), on peut définir $G = \mathcal{L}(g)$

$$\forall p \in \mathbb{R}, \quad G(p) = pX(p) - g(X(p)) \text{ en posant } \ X(p) = (g')^{-1}(p).$$

Le I.C.1 donne donc les relations : $g(p) = px(p) - h(x(p)), x(p) = (h')^{-1}(p), g'(p) = x(p)$ en remplaçant f par h .
On a alors $X(p) = (g')^{-1}(p) = x^{-1}(p) = h'(p)$
Donc pour tout réel p :

$$\begin{aligned} G(p) &= ph'(p) - g(h'(p)) \text{ en remplaçant } X(p) \text{ par sa valeur } h'(p) \\ &= ph'(p) - (h'(p).x(h'(p)) - h(x(h'(p)))) \quad \text{d'après la valeur de } g \\ &= ph'(p) - (h'(p).p - h(p)) \ \text{ car } x = (h')^{-1} \\ &= h(p) \end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathcal{L}(\mathcal{L}(h)) = h}$
c) D'après b), $\mathcal{L}$ est une involution de $\mathcal{H}$: c'est donc une bijection de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$.