Exercice 3

On note $R[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $R_k[X]$ le sous-ensemble de $R[X]$ constitué des polynômes nuls ou dont le degré est inférieur ou égal à k. Le coefficient binômial $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ sera noté $\binom{n}{k}$, ou bien C_n^k, au choix. On suppose n entier supérieur ou égal à 1 dans toute la suite.

1°. (a) Montrer l'existence de polynômes f_n et g_n dans $R_{n-1}[X]$, tels que :

$$(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1,$$

ceci par développement de $\big((1-X)+X\big)^{2n-1}$, ou autrement [NB : on ne demande pas de calculer leurs coefficients].

(b) Préciser les polynômes f_1, f_2 et f_3.

2°. Déterminer en fonction de f_n et de g_n tous les couples (A, B) de polynômes de $R[X]$ tels que $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$. Démontrer l'unicité de f_n et de g_n.

3°. (a) Montrer que $f_n(1-X) = g_n(X)$.

(b) Calculer $f_n(0)$, $f_n(1)$ et $f_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

4°. (a) Dans tout ce qui suit, x désigne une variable réelle. Pour x tendant vers 0, démontrer la formule asymptotique suivante : $f_n(x) = (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})$.

(b) En déduire les coefficients du polynôme f_n.

(c) L'équation $f_n(x) = 0$ peut-elle avoir une racine positive ou nulle ?

5°. (a) Établir, pour tout x réel, la relation $n\, f_n(x) - (1-x)\, f_n'(x) = n \binom{2n-1}{n} x^{n-1}$.

(b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ ne peut pas avoir deux racines réelles strictement négatives.

6°. Pour tout x réel, on pose : $h_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^{n-1}(1-t)^{n-1}\,dt$. Suivant la parité de n, donner le tableau des variations de la fonction h_n.

7°. (a) Démontrer que, pour tout $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1 - n\binom{2n-1}{n} h_n(x)}{(1-x)^n}$.

(b) Ce résultat est-il en accord avec la valeur de $f_n(1)$ trouvée plus haut ?

8°. Discuter selon n le nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 0$ sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

9°. Prouver que les racines de $f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$, sont de modules strictement inférieurs à 1.