Concours Centrale - Supélec 2002

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière MP

E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et orienté de sorte que la base canonique, notée $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, soit orthonormale directe.

On a donc pour tout x, y et z réels : $(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. Le produit scalaire sera noté : $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur non nul élément de E, on note $D_{\boldsymbol{u}}$, la droite vectorielle de base $\boldsymbol{u}$, $P_{\boldsymbol{u}}$ le plan vectoriel orthogonal à $D_{\boldsymbol{u}}$ et $S_{\boldsymbol{u}}$ le demi-tour par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ c'est-à-dire la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\boldsymbol{u}}$ ou encore la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{u}}$ et d'angle de mesure π.

Si θ est un nombre réel, on note R_θ la rotation vectorielle d'axe $D_{\boldsymbol{k}}$ orienté dans le sens du vecteur $\boldsymbol{k}$ et d'angle de mesure θ.

On rappelle qu'une rotation vectorielle de E ayant -1 comme valeur propre est un demi-tour.

On rappelle également l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in E^2,\ \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2$$

et l'on admet que dans cette inégalité, l'égalité a lieu si et seulement si les deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires.

Partie I - Étude d'un cas particulier

Pour tout (x, y, z) élément de E, on pose : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ et l'on note Q_0 l'ensemble suivant : $Q_0 = \{(x, y, z) \in E \mid q(x, y, z) = 0\}$.

I.A - Une étude de Q_0

I.A.1) Déterminer quelques éléments de symétrie de Q_0

I.A.2) Déterminer et dessiner l'intersection de Q_0 avec le plan $P_{\boldsymbol{j}}$.

I.A.3)

a) Démontrer que pour tout θ réel : $R_\theta(Q_0) \subset Q_0$.

b) En déduire que, pour tout θ réel, Q_0 est invariant par R_θ c'est-à-dire : $R_\theta(Q_0) = Q_0$.

I.A.4) Donner la nature géométrique de Q_0.

I.B - Automorphismes orthogonaux laissant $D_{\boldsymbol{u}}$ invariant

On note K l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant $D_{\boldsymbol{k}}$, c'est-à-dire : $K = \{\varphi \in O(E) ; \varphi(D_{\boldsymbol{k}}) = D_{\boldsymbol{k}}\}$

I.B.1) Donner quelques éléments de K.

I.B.2) Soit φ un élément quelconque de K.

a) Démontrer que $\boldsymbol{k}$ est un vecteur propre de φ.

b) Démontrer : $\varphi(\boldsymbol{k}) \in \{-\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\}$.

c) Déterminer l'ensemble K^+ des rotations vectorielles éléments de K.

I.B.3) On pose $K^- = \{-r ; r \in K^+\}$. Démontrer que $K = K^+ \cup K^-$.

I.C - Automorphismes orthogonaux laissant Q_0 invariant

On note K_0 l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E qui laissent globalement invariant Q_0, c'est-à-dire : $K_0 = \{\varphi \in O(E) ; \varphi(Q_0) = Q_0\}$.

I.C.1) Démontrer que K_0 est un sous-groupe de $O(E)$.

I.C.2)

a) Reconnaître, pour tout θ réel, l'endomorphisme $R_\theta \circ S_{\boldsymbol{i}}$.

b) Démontrer : $K^+ \subset K_0$.

c) Démontrer : $K \subset K_0$.

I.C.3) Soit φ un élément quelconque de K_0.

a) Démontrer que pour tout vecteur $\boldsymbol{v}$ élément de Q_0 tel que : $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$, l'on a :

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1.$$

b) On note $\boldsymbol{u}$ un vecteur quelconque unitaire élément de $P_{\boldsymbol{k}}$.

i) Observer que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k} \in Q_0$, puis démontrer : $\langle \varphi(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle^2 = 1$.

ii) En faisant intervenir le vecteur $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{k}$, en déduire : $\langle \varphi(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{k} \rangle \langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$

iii) On suppose $\langle \varphi(\boldsymbol{k}) | \boldsymbol{k} \rangle = 0$; démontrer qu'alors $\varphi(\boldsymbol{u})$ est colinéaire à $\boldsymbol{k}$. Est-ce cohérent ?

iv) En déduire : $\varphi(P_{\boldsymbol{k}}) = P_{\boldsymbol{k}}$.

I.C.4) Démontrer que $K_0 = K$.