Concours Centrale - Supélec 2000

Épreuve : MATHÉMATIQUES II — **Filière PC**

Nota : les trois parties du problème peuvent être abordées indépendamment.

Partie I - Propriétés de la transformée de Legendre

Dans toute la partie I - , I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles, définie sur I. On note $J(f)$ l'ensemble des réels p tels que la fonction définie sur I par $x \mapsto (px - f(x))$ soit majorée ; si $J(f) \neq \varnothing$, on définit la fonction g sur $J(f)$ par :

$$\forall p \in J(f),\ g(p) = \sup_{x \in I} (px - f(x)) \quad .$$

La fonction g est appelée la transformée de Legendre de f ; on note $g = \mathscr{L}(f)$.

I.A - Exemples

Calculer la transformée de Legendre $g = \mathscr{L}(f)$ (en précisant l'ensemble $J(f)$) et tracer le graphe de g, dans les cas suivants :

I.A.1) $f(x) = kx^2$ $(k \in \mathbb{R}_+^*)$; $I = \mathbb{R}$.

I.A.2) $f(x) = e^x$; $I = \mathbb{R}$.

I.A.3) $f(x) = \arctan(x)$; $I = \mathbb{R}$.

I.B - Etude générale

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que $J(f)$ est non vide.

I.B.1) Montrer que $J(f)$ est un intervalle : on montrera que, si a et b sont dans $J(f)$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $ta + (1-t)b$ appartient à $J(f)$.

I.B.2) Montrer que $g = \mathscr{L}(f)$ est convexe sur $J(f)$, c'est-à-dire :

$$\forall (a, b) \in J(f) \times J(f),\ \forall t \in [0, 1],\ g(ta + (1-t)b) \le tg(a) + (1-t)g(b).$$

I.B.3) Que peut-on dire de la monotonie de $g = \mathscr{L}(f)$ dans les cas suivants :

a) $I \subset \mathbb{R}^+$

b) $I \subset \mathbb{R}^-$.

I.C - Étude d'un cas particulier

Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle I, telle que : $\forall x \in I, f''(x) > 0$.

$f''(x) > 0$

On sait que $f'(I)$ est un intervalle ; on note α et β ses extrémités et l'on suppose $\alpha < \beta$ (on peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$).

I.C.1) Montrer que $J(f)$ contient l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ et donner l'expression de g sur $]\alpha, \beta[$ en fonction de f et $f'^{[-1]}$ (fonction réciproque de la fonction f'). Pour $p \in]\alpha, \beta[$, on note $x(p)$ l'unique point de I tel que : $g(p) = px(p) - f(x(p))$.

I.C.2) Pour $p \in]\alpha, \beta[$, calculer $g'(p)$ au moyen de $x(p)$.

I.C.3) Montrer que, $\forall p \in]\alpha, \beta[$, la droite D_p d'équation $y = px - g(p)$ est tangente au graphe de la fonction f.

I.C.4) Soit $\mathscr{H} = \{h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / (\forall x \in \mathbb{R}\ h''(x) > 0)$ et $h'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\}$. Montrer que:

a) $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$.

b) $\forall h \in \mathscr{H}$, $\mathscr{L}(\mathscr{L}(h)) = h$.

c) $\mathscr{L}$ est une bijection de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}$.

* Notez f_p la fonction définie sur I

$x \xmapsto{f_p} px - f(x)$

On a donc $\forall p \in]\alpha, \beta[$ $g(p) = \sup_{x \in I} (f_p(x))$