EPITA MP 2002
PARTIE 1

1.

1a)

- on a clairement $a(e_1) = e_2$, $a^2(e_1) = a(e_2) = e_3$. On a donc $E = Vect(e_1, a(e_1), a^2(e_1))$.
- On a donc $E \subset Vect(a^k(e_1), k \in \mathbb{N})$, d'autre part pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a^k(e_1) \in E$ donc $Vect(a^k(e_1), k \in \mathbb{N}) \subset E$ et donc

$$\boxed{E = Vect(a^k(e_1), k \in \mathbb{N})}$$

  a est donc cyclique en choisissant $x_0 = e_1$
- Pour déterminer les valeurs propres on résout le système $\det(M - \lambda Id) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 6 \\ 1 & -\lambda & -11 \\ 0 & 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  ce qui donne $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$. $\lambda = 1$ est racine évidente et $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 6)$ les valeurs propres sont : $1, 2$ et 3
- Pour $\lambda = 1$ on doit résoudre le système $a(v_1) = v_1$ je note $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et le sujet impose $z = 1$. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 6 = x \\ x - 11 = y \\ y + 6 = 1 \end{cases}$$

  la solution est évidente: $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$
- pour $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 6 = 2x \\ x - 11 = 2y \\ y + 6 = 2 \end{cases}$$

  donne $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
- pour $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 6 = 3x \\ x - 11 = 3y \\ y + 6 = 3 \end{cases}$$

  donne $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- On vérifie que $\det(v_1, v_2, v_3) = -2 \neq 0$, donc (v_1, v_2, v_3) est une base de E . Dans cette base la matrice de a est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; A est donc semblable à D et la matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -5 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  On a alors $A = PDP^{-1}$ ou encore $D = P^{-1}AP$

1b) même étude on trouve encore $b(e_1) = e_2$ et $b^2(e_1) = e_3$. On trouve $\det(B - \lambda Id) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$ de racines 1 simple et -1 double.

les vecteurs propres vérifient

- soit $b(v) = v$ ce qui donne $v \in Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- soit $b(v) = -v$ ce qui donne $v \in Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  L'ensemble des vecteurs propres engendre un plan . Il n'existe pas de base de E constituée de vecteurs propres.

$$\boxed{b \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

2.

2*) La famille $(x_i)_{i=1}^n$ a le bon cardinal . Il suffit de vérifier qu'elle est libre : Soit $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \overrightarrow{0}$. Par définition $c(x_i) = \lambda_i x_i$ donc $a_i x_i \in Ker(c - \lambda_i Id)$. D'après le résultat admis dans les préliminaires la somme des $Ker(c - \lambda_i Id)$ est directe ; l'unique décomposition du vecteur nul donne donc $\forall i$, $a_i x_i = 0$, et comme par définition d'un vecteur propre $x_i \neq \overrightarrow{0}$ on a $\forall i$, $a_i = 0$.

$$\boxed{(x_i)_{i=1}^n \text{ est une base de } E}$$

2a) par définition on a $\forall i \in [[1, n]]$, $c(x_i) = \lambda_i x_i$. Donc si on note $x_0 = \sum_{i=1}^n x_i$,on obtient par linéarité $c(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et par récurrence si $c^k(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x_i$ alors $c^{k+1}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k c(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{k+1} x_i$.

2b) Prenons une combinaison linéaire nulle des $c^k(x_0)$ .On a donc $\sum_{k=0}^{n-1} a_k c_k(x_0) = \overrightarrow{0}$, soit $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x_i = \overrightarrow{0}$ .Or la famille des (x_i) est une base de E . chaque coordonnée dans cette base est nulle. On a donc

$$\forall i \in [[1, n]] \ , \ \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_i^k = 0$$

On prend alors le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .Ce polynôme est de degré $\leq n - 1$ et admet n racines distinctes les (λ_i) . Le polynôme est donc nul . Tous ces coefficients sont nuls . $\boxed{\text{La famille } \left(c^k(x_0)\right)_{k=0}^{n-1} \text{ est libre}}$

2c) Comme la famille est une famille libre de bon cardinal , c'est une base de E $E = Vect\left(c^k(x_0)\right)_{k=0}^{n-1}$ .Par double inclusion comme au I1) on en déduit $E = Vect\left(c^k(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\boxed{c \text{ est cyclique}}$$

PARTIE 2

3.

3a) On peut remarquer que $x_0 \neq \overrightarrow{0}$ car sinon $E = Vect(f^k(\overrightarrow{0})) = Vect(\overrightarrow{0}) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim(E) \geq 2$.

La famille (x_0) est donc libre . Par contre pour $m \geq n$ la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^m$ est de cardinal $\geq n + 1$ en dimension n . Elle est donc liée.

Dans la suite $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^0, \left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^1 \cdots \left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^n$ on passe donc au moins une fois d'une famille libre à une famille lié.

L'ensemble des m tels que $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{m-1}$ soit libre et $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^m$ soit lié , est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$, majoré par n. Il admet un plus grand élément.

On montre alors par récurrence que pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{m+k}(x_0) \in Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

- si $k = 0$: On sait que $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^m$ est lié . Il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=0}^m a_i f^i(x_0) = \overrightarrow{0}$ avec $(a_i)_{i=0}^m \neq (0)$

  Si $a_m = 0$ on a comme $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$ est libre $\forall i$ a$_i = 0$:ABSURDE

  donc $a_m \neq 0$ et $f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} -\frac{a_i}{a_m} f^i(x_0)$. Donc pour $k = 0$ $f^{m+0}(x_0) \in Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$
- On suppose $f^{m+k}(x_0) \in Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$, il existe donc des scalaires b_i tels que $f^{m+k}(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i f^i(x_0)$ (les b_i dépendent aussi de k) . On a alors

$$\begin{aligned} f^{m+k+1}(x_0) &= \sum_{i=0}^{m-1} b_i f^{i+1}(x_0) = \sum_{j=1}^{m-1} b_{j-1} f^j(x_0) + b_{m-1} f^m(x_0) = \\ & b_{m-1}\left(-\frac{a_0}{a_m}\right) f^0(x_0) + \sum_{j=1}^{m-1}\left(b_{j-1} - b_{m-1}\frac{a_{m-1}}{a_m}\right) f^j(x_0) \end{aligned}$$

  et donc $f^{m+k+1}(x_0) \in Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

- par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \ , \ f^{m+k}(x_0) \in Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}}$

3b) Par définition de m la famille est libre .

Elle est aussi génératrice car $E = Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}} = Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$ d'après le **a)** en effet :

- $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \subset \left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ donc $Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \subset Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}$
- Si $x \in Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}}$, il existe un entier p et des scalaires q_i tel que $x = \sum_{i=0}^{q} q_i f^i(x_0)$ .On a donc une combinaison linéaire d'éléments de $Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$. Donc un élément de $Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$: $Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset Vect\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1}$

La famille est libre et génératrice .C'est donc une base de E . elle est donc de cardinal n .Donc $m = n$

$$\boxed{\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{m-1} \text{ est une base de } E \text{ et } m = n}$$

4.

4a) pour $i < n-1$, l'image du $i-$ème vecteur de base est le $(i+1)-$ème . La $i-$ème colonne de M est donc une colonne de 0 sauf ligne $i+1$ où il y a un 1 . L'image du dernier vecteur de base est $f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0)$. On a donc :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix} , \ m_{i,j} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } i = j+1 \\ p_{i-1} \text{ si } j = n \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Remarque : il n'est pas inutile de faire le lien avec A et B .

4b) On montre que $\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$:

Soit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = O$ (en notant O le neutre de $\mathcal{L}(E)$). Si on prend l'image de x_0 par cette relation on trouve $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0) = \overrightarrow{0}$. Et donc comme $\left(f^i(x_0)\right)_{i=0}^{n-1}$ est une base de E : $\forall i \ , \ a_i = 0$

$$\boxed{\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1} \text{ est une famille libre de } \mathcal{L}(E)}$$

La fin de la question est fausse le polynôme nul étant solution évidente du problème. Par contre il n'existe pas de polynôme non nul de degré $< n$ tel que $Q(f) = 0$ .En effet si $Q = \sum_{k=0}^{n-1} q_k X^k$ existe on a $\sum_{k=0}^{n-1} q_k f^k = O$. Et donc comme la famille est libre $\forall k$, $q_k = 0$ et donc $Q = 0$

4c) On a par définition des notations $P(f)(x_0) = f^n(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0) = \overrightarrow{0}$.

Donc pour tous k $P(f)(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^{i+k}(x_0) = f^k\left(f^n(x_0) - \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x_0)\right) = f^k(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Les applications $P(f)$ et O sont égales sur une base : elle sont égales

$$\boxed{Pf) = O}$$

5.

5a) Par une récurrence déjà faite au I2a) on a $f^k(x) = \lambda^k x$. on donc $P(f)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i f^i(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \lambda^i x = P(\lambda)x$.

On $x \neq 0$ donc $P(\lambda) = 0$

5b) La matrice de $f - \lambda Id$ est $M - \lambda I_n$ soit

$$M = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} , \ m_{i,j} = \left\{ \begin{array}{c} -\lambda \text{ si } i = j < n \\ 1 \text{ si } i = j+1 \\ p_{i-1} \text{ si } j = n, i < n \\ p_{n-1} - \lambda \text{ si } i = j = n \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

- Si $\lambda = 0$ alors $p_0 = 0$ car λ est racine de P. Un pivot de Gauss qui échange les ligne de P donne

$$\begin{aligned} rg(M) &= rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & p_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : C_n \leftarrow C_n - \sum_{i=1}^{n-1} p_i C_i \end{aligned}$$

  matrice diagonale ayant $n-1$ termes non nuls sur la diagonale, donc de rang $n-1$
- Si $\lambda \neq 0$ on divise toutes les colonnes sauf la dernière par -λ

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ -1/\lambda & 1 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & -1/\lambda & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & p_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1/\lambda & p_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

  puis on fait apparaître des 0 dans la dernière colonne:

$$C_n \leftarrow C_n - p_0 C_1, C_n \leftarrow C_n - \left(p_1 + \frac{p_0}{\lambda}\right) C_2, \cdots C_n \leftarrow C_n - \left(\frac{p_0}{\lambda^{k-1}} + \frac{p_1}{\lambda^{k-2}} + \cdots p_{k-1}\right) C_k$$

$$rg(M) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1/\lambda & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/\lambda & \left(\frac{p_0}{\lambda^{n-1}} + \frac{p_1}{\lambda^{k-2}} + \cdots p_{n-1}\right) - \lambda \end{pmatrix}$$

  le coefficient $n \times n$ est alors $\frac{-P(\lambda)}{\lambda^{n-1}} = 0$
- On retire la dernière colonne
  la matrice obtenue est "triangulaire" ayant des termes tous non nuls sur la d"iagonale", donc le rang est $n-1$
- Dans les deux cas $\ker(f - \lambda Id)$ est de rang $n-1$. $\boxed{\text{Le sous espace propre (le noyau) est de dimension 1}}$

5c) Si il existe n valeurs propres distinctes , l'endomorphisme est toujours diagonalisable :

(5/2) c'est du cours

(tous) si l'endomorphisme admet n valeur propres distincts il existe n $\ker(f - \lambda_i Id)$ non réduit à 0, correspondant à des valeurs propres distincts . La somme $\sum \ker(f - \lambda Id)$ est directe . On a donc $\dim(\oplus \ker(f - \lambda_i Id)) \geq n$. Or on a un sous espace vectoriel de E de dimension n . Donc $\dim(\oplus \ker(f - \lambda_i Id)) = n$. Par inclusion et égalité des dimensions $\oplus \ker(f - \lambda_i Id) = E$. En créant une base adaptée à la $\oplus$, on construit une base de vecteurs propres et donc f est diagonalisable

5c réciproque) Soit f cyclique , diagonalisable , il existe donc une base de vecteurs propres . Supposons (par l'absurde) qu'il existe dans cette base deux vecteurs distincts b_i et b_j associés à la même valeur propre λ.On a alors $b_i \in \ker(f - Id)$ et $b_j \in \ker(f - \lambda Id)$, donc le plan $Vect(b_i b_j) \subset Ker(f - Id)$ .Ce qui contredit le résultat de **5b).**Donc il y autant de valeurs propres distinctes que de vecteurs de base .f admet n valeurs propres distincts.

6.

6a)

- $C(f)$ est un sous ensemble de $\mathcal{L}(E)$
- $C(f)$ contient Id
- $C(f)$ est stable par combinaison linéaire : si $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$ alors pour tous scalaires λ, μ :

$$\begin{aligned} (\lambda g + \mu h) \circ f &= \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) \\ &= f \circ (\lambda g) + f \circ (\mu h) = f \circ (\lambda g + \mu h) \end{aligned}$$

- $C(f)$ est donc stble par soustraction.
- $C(f)$ est stable par produit interne $(\circ)$:si $g \circ f = f \circ g$ et $h \circ f = f \circ h$:

$$(g \circ h) \circ f = g \circ (h \circ f) = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

$$\boxed{C(f) \text{ est un sous espace vectoriel et un sous anneau de } \mathcal{L}(E)}$$

6b) On suppose $u \circ f = f \circ u$, $v \circ f = f \circ v$ et $u(x_0) = v(x_0)$ .On montre par récurrence que u et v sont égaux sur la base $\left(f^k(x_0)\right)_{k=0}^{n-1}$, donc que $u = v$.

- pour $k = 0$ c'est la définition de u et v
- pour $k = 1$:

$$u(f(x_0)) = (u \circ f)(x_0) = (f \circ u)(x_0) = f(u(x_0)) = f(v(x_0)) = (f \circ v)(x_0) = (v \circ f)(x_0) = v(f(x_0))$$

- si $u(f^k(x_0)) = v\left(f^k(x_0)\right)$

$$\begin{aligned} u(f^{k+1}(x_0)) &= (u \circ f)(f^k(x_0)) = (f \circ u)(f^k(x_0)) = f\left(u\left(f^k(x_0)\right)\right) \\ &= f\left(v\left(f^k(x_0)\right)\right) = (f \circ v)\left(f^k(x_0)\right) = (v \circ f)(f^k(x_0)) = v\left(f^{k+1}(x_0)\right) \end{aligned}$$

  d'où l'égalité pour tout vecteur de la base

6c) Remarquons que les $(a_i)_{i=0}^{n-1}$ existent car on décompose dans une base.
on prend alors $u = g$, $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$, On suppose que $u = g \in C(f)$, comme tout polynôme de l'endomorphisme f on a $v \in C(f)$, enfin on a supposé $u(x_0) = v(x_0)$. On a donc d'après le **a)** $u = v$ donc $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$
6d) On vient de montrer que tout élément de $C(f)$ est dan $Vect(f^k)_{k=0}^{n-1}$, et on a déjà utilisé que tout élément de $Vect(f^k)_{k=0}^{n-1}$ est dans $C(f)$. Donc $C(f) = Vect\left(f^k\right)_{k=0}^{n-1}$.
D'après le **II4b)** cette famille est libre . C'est donc une base de $C(f)$.

$$\boxed{C(f) \text{ est un sous espace vectoriel de dimension } n}$$