CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE 1998
FILIERE PC EPREUVE 2 Problème 1

1. La fonction f étant continue sur $[-1,1]$ On peut poser $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ et ϕ est C^1 sur $[-1,1]$ comme primitive d'une fonction continue., On a alors $F=\phi\circ\sin$. la fonction sinus est C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $[-1,1]$ et ϕ est C^1 sur $[-1,1]$ donc par composition F est C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $\boxed{F'(x)=\cos(x).f(\sin(x))}$.

2. Soi u une primitive de f . On a $F(x)=u(x+T)-u(x)$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, u est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc F et aussi C^1 et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x+T)-f(x)=0$ car f est périodique de période T, La dérivée est nul sur un intervalle . La fonction F est constante

   On peut écrire par changement de variable $u=t+T$, C^1 :

$$\int_0^{x+T} f(t)dt=\int_{-T}^{x} f(u+T)du=\int_{-T}^{x} f(u)du=\int_0^{x} f(u)du+\int_{-T}^{0} f(u)du$$

   $F(x)=\int_{-T}^0 f(u)du$

3. **a)**Pour $m=0$, la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}\ u(x)=x$.

   b)Pour $m=1$, on a $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}=\frac{1}{|\cos(t)|}$.Pour que cette fonction soit continue sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$ il faut et il suffit que $x\in\,]-\pi/2,\pi/2[$ .On a alors $u(x)=\int_0^x\frac{1}{\cos(t)}dt$. Le changement de variable C^1 : $t=2\arctan(u)$, $u=\tan(t/2)$ donne $u(x)=2\int_0^{\tan(x/2)}\frac{1}{1-u^2}du=\int_0^{\tan(x/2)}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|$

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ u(x)=\ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|}$$

   une autre primitive classique est , $u(x)=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

   5/2:La fonction n'a pas de limite finie si x tend vers $\pm\pi/2$ .On ne peut pas espérer définir $u(\pi/2)$ comme $\int_{]0,\pi/2[}\frac{dt}{\cos(t)}$

4. **a)** Comme $1-m.\sin^2(t)\geq 1-m>0$, la fonction $t\longmapsto\frac{1}{\sqrt{1-m.\sin^2(t)}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc u est C^1 sur $\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\boxed{u'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-m.\sin^2(x)}}}$$

   b)On a : $\forall x\in\mathbb{R}\ u'(x)>0$, donc : u est croissante (strictement) sur $\mathbb{R}$.

   u' est paire et $u(0)=0$,et u est C^1 donc $u(-x)=\int_0^{-x}u'(t)dt=\int_0^x u'(-\tau)\,(-d\tau)=-\int_0^x u'(\tau)d\tau=-u(x)$

$$\boxed{u\text{ est impaire}}$$

   dans le cas général si ϕ est paire il existe une constante K telle que $\phi(-x)=K-\phi(x)$

   c)Pour $x>0$, on a : $u(x)\geq\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-m}}=\frac{x}{\sqrt{1-m}}\longrightarrow_{x\to+\infty}+\infty$.

   Donc,

$$\boxed{u\text{ admet une limite en }+\infty\text{ égale à }+\infty}$$

5. **a)** De manière analogue au 1.1, v est définie et C^1 sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et, sur cet intervalle, on a:

$$v'(x)=\cos(x)\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2(x))(1-m\sin^2(x))}}=u'(x)$$

   car sur $]-\pi/2,\pi/2[$, $\sqrt{1-\sin^2(x)}=|\cos(x)|=\cos(x)$. On a donc $u'=v'$et donc $u-v$ est constante. De plus, on a $u(0)=v(0)=0$.

   Finalement, pour $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $u(x)=v(x)$.

   b) si $x=\pi/2$ la fonction $t->\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ n'est pas continue ni continue par morceaux sur $[0,1]$ donc $v(\pi/2)$ n'existe pas. On a toutefois $\lim_{\pi/2}v(x)=\lim_{\pi/2}u(x)=u(\pi/2)$ car la fonction u est continue sur $[-\pi/2,\pi/2]$. En prolongeant par continuité on peut poser $v(\pi/2)=u(\pi/2)$ et de même $v(-\pi/2)=u(-\pi/2)$

   5/2 : vous pouvez répondre de façon tout aussi valable que **t**$->\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ est intégrable sur $[0,1[$ car elle est continue positive sur $[0,1[$ équivalente en 1 à $\frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{2(1-m)}}$ intégrable sur $[0,1[$ car $1/2<1$.Donc $v(\pi/2)$ est définie .Puis retrouver par passage à la limite $\mathrm{v}(\pi/2)=u(\pi/2)$

c) la fonction $t->\frac{1}{\sqrt{1-m\sin(t)^2}}$ est π périodique continue sur $\mathbb{R}$. D'après la question 2 , $u(x+\pi)-u(x)=\int_x^{x+\pi}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ est constante. En notant $K(m)$ cette constante et en prenant $x=-\pi/2$ on a : $K(m)=u\left(\frac{\pi}{2}\right)-u\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ Donc par imparité de u :

$$\underline{K(m)=2.u\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

6. **a)** La fonction u est C^1 strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à dérivée toujours non nul (car la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-m.\sin^2(x)}}$ est strictement positive) , donc u est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{-\infty}(u),\lim_{+\infty}(u)[\,=\,]-\infty,+\infty[$ d'après 1.4.c et l'imparité de u . donc $u(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et u admet une fonction réciproque (notée A) C^1 de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. comme $A'=\frac{1}{u'\circ A}$, A' est strictement positive et A est strictement croissante.

$$\boxed{u \text{ admet une fonction réciproque } A\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\text{strictement croissante}}$$

b) Pour tout réel x, on a $u(A(x)+\pi)=u(A(x))+K(m)=x+K(m)$ donc

$$A(x+K(m))=A(u(A(x)+\pi))=A\circ u\,(A(x)+\pi)=A(x)+\pi$$

Finalement, $\boxed{A(x+K(m))-A(x)=\pi}$

$t->\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ étant C^∞ sur $\mathbb{R}$, u est aussi C^∞ comme primitive d'une fonction continue .

la dérivée de u ne s'annulant pas u est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.; A est C^∞ sur $\mathbb{R}$: on peut calculer $A"m$:

c) On a $A'=\frac{1}{u'\circ A}$ et donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}, A'(x)=\frac{1}{u'(A(x))}=\sqrt{1-m.\sin^2(A(x))}}$$

en dérivant cette relation :

$$A''(x)=\left(\frac{-2m\sin\left(A(x)\right)\cos\left(A(x)\right)}{2\sqrt{1-m.\sin^2(A(x))}}\right).A'(x)=-m.\sin(A(x))\cos(A(x))$$

On a bien la formule demandée:

$$\boxed{A"+m\sin(A)\cos(A)=0}$$

7. On a : $S(y)=\sin(A(y))$, $C(y)=\cos(A(y))$, $D(y)=\sqrt{1-m\sin^2(A(y))}=A'(y)$

a) A est impaire car réciproque d'une fonction impaire. On en déduit que C et D sont paires et que S est impaire.

b) En utilisant 1.6.b, on trouve que S et C sont $2K(m)$-périodiques et que D est $K(m)$-périodique.

Remarque:On a donné une période de la fonction . Montrer que c'est la période (donc la plus petite période strictement positive) n'est pas si simple .Ce n'est sans doute pas l'objectif non plus du concepteur du sujet qui a fait calculer aux questions précédentes une période de u et A sans chercher à faire prouver que c'est bien la plus petite strictement positive .

Les fonctions C et S sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions dérivables et D l'est car $A"$ est C^2 .On a

$$\boxed{S'=CD,\ C'=-SD \text{ et } D'=-mSC}$$

Le problème se continue avec deux questions qui utilisent les fonctions précédentes pour étudier une équation aux dérivées partielles . Le second problème portait sur les équations différentielles

Le problème a une origine physique : Si on étudie le mouvement du pendule sans force de frottement on démontre que la période du pendule , dans un système d'unités bien choisi , est $K(\sqrt{\sin(\theta/2)})$ si θ est l'angle maximum du mouvement .