$\boxed{\text{CCP 2002 - PC - Maths 1}}$

Le sujet a été adaptée (questions I1 et II 6) pour tenir compte du nouveau programme.

Partie I

1.1) $P_G(x) = \det(G - xI_3) = (1-x)^3$; 1 est valeur propre de multiplicité 3 et $G \neq I_3 \Rightarrow \dim[\ker(G - I_3)] \neq 3$ donc G n'est pas diagonalisable .
1.2) Si la matrice triangulaire existe ses termes diagonaux sont les valeurs propres donc $\alpha = \beta = \gamma = 1$.
$rg(G-I_3) = 2$ donc $\dim[\ker(G-I_3)] = 1$, donc si T existe du type proposé $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, sinon $\dim[\ker(G-I_3)] = 2$ pour construire une base qui conviennent

- on prend $X_1 \in Ker(G-I_3)$: $\begin{cases} y = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on prend $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- on prend X_2 tel que $G(X_2) - X_2 = X_1$: $\begin{cases} y = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on prend $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- on prend X_3 tel que $G(X_3) - X_3 = X_2$: $\begin{cases} y = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ 2x - 5y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 2 \\ 2x + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on prend $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- on vérifie $\boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}$
  la solution est loin d'être unique.

1.3) $T = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $N^3 = 0$ et $NI_3 = I_3N$ donc $T^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$ et $G^n = PT^nP^{-1}$

$$\forall n \in \mathbb{N} , \; G^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n^2 - n + 2 & 4n - n^2 & n^2 - n \\ 2n & 2 - 4n & 2n \\ -n^2 + 5n & 2n^2 - 12n & -n^2 + 5n + 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie pour n=0 et n=1
1.4) Les coefficients de G^n divergent tous vers l'infini

$$\boxed{\text{La suite } (G_n) \text{ diverge}}$$

2.) Toute matrice (endomorphismes) ayant un polynôme caractéristique scindé est trigonalisable et cette hypothèse est toujours vérifiée si le corps de base est $\mathbb{C}$. les éléments diagonaux de T sont les valeurs propres de A (avec multiplicité)
3.1) Par hypothèse : $j < i \Rightarrow s_{i,j} = t_{i,j} = 0$. Soit $U = ST = (u_{i,j})$: $u_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}t_{k,j}$.

- Si $i > j$ alors pour $k < i$: $s_{i,k} = 0$ et pour $k \geq i$, $k > j \Rightarrow t_{k,j} = 0$ donc $u_{i,j} = 0$
- si $i = j$ seul $k = i$ donne un terme non nul : $u_{i,i} = s_{i,i}t_{i,i}$

Donc $ST \in T_n(\mathbf{C})$
3.**2)** On prend $S = T$: $T^2 \in T_n(\mathbf{C})$, d'éléments diagonaux $(t_{i,i})^2$. Par récurrence : si $T^p \in T_n(\mathbf{C})$, d'éléments diagonaux $(t_{i,i})^p$, on prend $S = T^p$ d'où $T^{p+1} \in T_n(\mathbf{C})$, de termes diagonaux $(t_{i,i})^{p+1}$.

$$\boxed{\text{les éléments diagonaux de } T^k \text{ sont les puissance } k^{\text{eme}} \text{ de ceux de } T}$$

4.) Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. D'après 2) , $\exists T \in T_n(\mathbf{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbf{C})$, $T = P^{-1}AP$ et les termes diagonaux $t_{1,1},...,t_{n,n}$ de T sont les valeurs propres $\lambda_1,...,\lambda_n$ de A . D'après 3) , les termes diagonaux de T^k sont $(\lambda_1)^k,...,(\lambda_n)^k$; et $T^k = P^{-1}A^kP$, ce sont donc les valeurs propres de A^k . Donc $\rho(A^k) = \max\left\{\left|(\lambda_i)^k\right| , 1 \leq i \leq n\right\} = (\max\{|\lambda_i| , 1 \leq i \leq n\})^k$
Conclusion :

$$\boxed{\rho(A^k) = [\rho(A)]^k}$$

5.) C'est la norme infini.

- $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A)$ existe et $\psi(A) \geq 0$
- $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$
- $\forall A \in M_n(\mathbf{C}), \forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\psi(\lambda A) = |\lambda|\, \psi(A)$;
- $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A+B) \leq \psi(A) + \psi(B)$:

$$\boxed{\psi \text{ est une norme sur } M_n(\mathbf{C})}$$

La matrice T de la question 1 donne un bon exemple puisque $\psi(T) = 1$, et $\psi(T^2) = 2 \geq 1.1$

ψ n'est pas une norme matricielle

6.) En dimension finie toutes les normes sont équivalentes en particulier N et une norme matricielle $\|.\|$car $\dim(M_{,n}(\mathbb{C})) = n^2$. Par définition :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0 \ \ \forall A \in M_n(\mathbf{C}) , \ \alpha \|A\| \leq N(A) \leq \beta \|A\|$$

Alors $N(AB) \leq \beta \|AB\| \leq \beta \|A\| . \|B\| \leq \frac{\beta}{\alpha^2} N(A)N(B)$

$$\boxed{\exists C = \frac{\beta}{\alpha^2} \in \mathbb{R}^+, \forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C}) \ , N(AB) \leq CN(A)N(B)}$$

7.) Soit $\forall k$, $B_k = P^{-1}A_kP$ et $B = P^{-1}AP$. $\forall k$, $B_k - B = P^{-1}(A_k - A)P$
$0 \leq N(B_k - B) \leq C^2 N(P^{-1})N(A_k - A)N(P)$ d'où : $N(A_k - A) \to 0 \Rightarrow N(B_k - B) \to 0$
Réciproque : si (B_k) converge vers B , alors $\left(PB_kP^{-1}\right)$ converge vers PBP^{-1} d'où (A_k) converge vers A

$$\boxed{\lim_{k->+\infty}(A_k) = A \Leftrightarrow \lim_{k->+\infty}\left(PA_kP^{-1}\right) = PAP^{-1}}$$

8.1) On a $T = \lambda I_2 + \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec deux matrices qui commutent donc $T^k = \lambda^k I_2 + k\lambda^{k-1}N = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\mu\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$ avec le binôme de Newton.

- si $|\lambda| < 1$, la suite converge vers 0_2
- si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, la suite converge vers I_2
- si $\lambda = 1$ et $\mu \neq 0$, la suite diverge car le coefficient $(1,2)$ ne tend pas vers zéro
- si $|\lambda| \geq 1$ et $\lambda \neq 1$ la suite diverge car le coefficient $(1,1)$ ne tend pas vers zéro

8.2) $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{pmatrix}$. D'après 7.) $\left(A^k\right)$ converge si et seulement si $\left(D^k\right)$ converge .

$$\text{les cas de convergences sont } : \begin{cases} \forall i \in \{1,2\} \ , \ |\lambda_i| < 1 \text{ (limite } 0_2) \\ \lambda_1 = 1 \text{ et } |\lambda_2| < 1 \text{ limite } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{idem si } \lambda_2 = 1, |\lambda_1 < 1 \qquad | \\ \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ limite } I_2 \end{cases}$$

8.3) Si A n'est pas diagonalisable , nécessairement ses valeurs propres sont égales et A est trigonalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$, $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\mu \neq 0$ (sinon A serait diagonalisable) . Donc d'après 8.1) , la suite $\left(T^k\right)$ converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ et d'après 7.) , $\left(A^k\right)$ converge si et seulement si $\left(T^k\right)$ converge . Ici $\rho(A) = |\lambda|$. Donc

$$\boxed{\left(A^k\right) \text{ converge si et seulement si } \rho(A) < 1 \text{ et la limite est } 0_2}$$

8.4) D'après 8.2) , si A est diagonalisable : $\left(A^k\right)$ converge vers 0_2 si et seulement si $(|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_1| < 1)$, donc si et seulement si $\rho(A) < 1$. On a le même résultat si A n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{\left(A^k\right) \text{ converge vers } 0_2 \text{ si et seulement si } \rho(A) < 1}$$

Partie II

1.1) Posons $Y = AX$: $\forall i, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$ .Donc $|y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) N_\infty(X) \leq M_A N_\infty(X)$ donc $\boxed{N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)}$

1.2) toujours par équivaence des normes car $\mathbb{C}^n$ est de dimension finie : $\exists\alpha\,,\,\beta > 0\,,\ \forall X \in \mathbf{C}^n\ ,\ \alpha N_\infty(X) \leq N(X) \leq \beta N_\infty(X)$

$N(AX) \leq \beta N_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \leq \beta M_A \frac{1}{\alpha} N(X) \leq C_A N(X)$.

$$\boxed{\exists C_A = \frac{\beta}{\alpha} M_A, \forall X \in \mathbb{C}^n\ ,\ N(AX) \leq C_A N(X)}$$

1.3) $\forall X \neq 0$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq C_A$. L'ensemble $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)}\ ,\ X \in \mathbf{C}^n - \{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc <u>admet une borne supérieure</u> .

1.4) Cette borne supérieure est le plus petit majorant et C_A est un majorant donc $\widetilde{N}(A) \leq C_A$ .Dans le cas de la norme N_∞ , on peut prendre $\alpha = \beta = 1$ donc $C_A = M_A$ donc:

$$\boxed{\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A}$$

.

1.5) On constate que $M_G = 10$ sur la troisième ligne . On cherche une combinaison linéaire des colonnes qui donnent ce 10 (ou on "triche" un peu en utilisant la question suivante pour "deviner") $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow GX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. On a : $N_\infty(X_0) = 1\,, N_\infty(GX_0) = 10$ d'où $\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10 \Rightarrow \widetilde{N}_\infty(G) \geq 10$. et comme $M_G = 10$ donc $\widetilde{N}_\infty(G) \leq 10$. Conclusion : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(G) = M_G = 10}$

2.) par construction $N_\infty(Y) = 1$. Soit $X = AY$. $N_\infty(X) = N_\infty(AY) \leq M_A N_\infty(Y) = M_A$
de plus si $i = i_0$ on a $x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} y_j = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$ car:

- si $a_{i_0 j} = 0$ alors $a_{i_0,j} y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$
- si $a_{i_0 j} \neq 0$ $a_{i_0,j} y_j = a_{i_0,j} \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} = \frac{|a_{i_0,j}|^2}{|a_{i_0,j}|} = |a_{i_0}, j|$

donc $N_\infty(AY) = M_A$ et donc $\frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} = M_A \Rightarrow \boxed{\widetilde{N}_\infty(A) \geq M_A}$. En utilisant 1.4) on peut conclure : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(A) = M_A}$

3.1)

- Si $A = 0_n$, $\forall X \in \mathbb{C}^n, AX = 0$ et donc $\widetilde{N}(A) = 0$
- Si $\widetilde{N}(A) = 0$ alors pour $X \neq 0\,, N(AX) = 0$ donc $\forall X \neq 0\,,\ AX = 0$ (car N est une norme) , le noyau de A est $\mathbb{C}^n$ et donc $A = 0_n$

3.2) $\forall X \neq 0\,, \frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = \frac{|\lambda| N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$ donc $|\lambda| \widetilde{N}(A)$ est un majorant de $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)}\right\}$: $\widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$

3.3)

- Si $\lambda \neq 0$: $\widetilde{N}(A) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \widetilde{N}(\lambda A)$ en appliquant la question précédente à $\left(\lambda A, \frac{1}{\lambda}\right)$ et donc $|\lambda| \widetilde{N}(A) \leq \widetilde{N}(\lambda A)$ d'où en réunissant les deux résultats $\boxed{|\lambda| \widetilde{N}(A) = \widetilde{N}(\lambda A)}$
- Si $\lambda = 0$ on a égalité car les 2 membres sont nuls .

3.4) $\forall X \neq 0\,, N[(A+B)X] = N(AX + BX) \leq N(AX) + N(BX) \Rightarrow \frac{N[(A+B)X]}{N(X)} \leq \frac{N(AX)}{N(X)} + \frac{N(BX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$ donc $\boxed{\widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)}$

3.5)

- si $X \neq 0$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A) \Rightarrow N(AX) \leq \widetilde{N}(A)N(X)$
- si $X = 0$ les 2 membres sont nuls .

3.6) On déduit de 1.3,3.1,3.3 et 3.4 , que $\widetilde{N}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{C})$. De plus :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbf{C}) \text{ , } \forall X \in \mathbf{C}^n, X \neq 0 \text{ , } \frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \frac{\widetilde{N}(A)N(BX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)$$

d'où : $\underline{\widetilde{N}(AB) \leq \widetilde{N}(A)\widetilde{N}(B)}$

Conclusion : $\boxed{\widetilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } M_n(\mathbf{C})}$ (ce qui en prouve l'existence car les études du début de cette partie II n'utilisent pas la fin du I)

4.1) Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $AX = \lambda X \Rightarrow \frac{N(AX)}{N(X)} = |\lambda|$ donc $|\lambda| \leq \widetilde{N}(A)$. En particulier pour λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Donc $\boxed{\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)}$

4.2) Si $A = I_n$: $\rho(A) = 1$ et $\forall X$, $AX = X$ donc $\widetilde{N}(A) = 1$: on a égalité .

4.3) Si $A \neq 0_n$ alors $\widetilde{N}(A) \neq 0$ d'après 3)a) . Si de plus A est nilpotente , sa seule valeur propre est 0 donc $\rho(A) = 0$ et : $\rho(A) < \widetilde{N}(A)$

5.) Si $\left(A^k\right)$ converge vers 0_n alors $\widetilde{N}(A^k) \to 0$ .Or d'après I 4 $\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \widetilde{N}(A^k)$ donc $[\rho(A)]^k \to 0$. D'où : $\boxed{\rho(A) < 1}$
.

6.1)C'est la formule du binôme de Newton tronquée car pour $i \geq p$ on a $N^i = 0_n$. On peut utiliser la formule du binôme car $DN = ND$.

6.2) On sait que $\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} \sim_{k->+\infty} \frac{k^i}{i!}$. Donc $\binom{k}{i}x^k \sim \frac{k^i x^k}{i!}$ a une limite nulle car la suite géométrique l'emporte sur la puissance.

En divisant par x^i (si $x \neq 0$) on a aussi $\lim\left(\binom{k}{i}x^{k-i}\right) = 0$. Le résultat étant évident si $x = 0$

6.3) Si $\rho(A) < 1$, toutes les valeurs propres de A sont de module < 1 . Donc les termes diagonaux de D qui sont les valeurs propres de A le sont aussi . Donc pour tout i $\binom{k}{i}D^{k-i}$ tend vers 0 . Et donc $\lim\left(T^k\right) = 0_n$ et d'après *I*.7.1) en prenant pour T une matrice telle qu'admise en début de question on a $\lim\left(A^k\right) = 0_n$.

$$\boxed{\text{la suite } \left(A^k\right) \text{ converge vers } 0_n \text{ si et seulement si } \rho(A) < 1}$$

7.1) De l'inégalité vue en 5) $\rho(A)^k \leq \widetilde{N}(A^k)$ on déduit pour $k \in \mathbf{N}^*$: $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}}$

7.2) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in Sp(\alpha A)$ donc en prenant le sup des modules (norme infinie) $\rho(\alpha A) = |\alpha|\, \rho(A)$

7.3) On prend $\alpha = \frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}$ $(\alpha > 0)$ et on applique a) : $\rho(A_\varepsilon) = \alpha\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$ car $\varepsilon > 0$

D'après le résultat de 6) , $(A_\varepsilon)^k$ converge vers 0 donc $\exists k_\varepsilon$, $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\widetilde{N}\left((A_\varepsilon)^k\right) \leq 1$. Or $A_\varepsilon^k = \alpha^k A^k$ donc $\widetilde{N}\left((A_\varepsilon)^k\right) = \alpha^k\widetilde{N}(A^k)$. $\alpha^k\widetilde{N}(A^k) \leq 1 \Rightarrow \boxed{\widetilde{N}(A^k) < (\rho(A) + \varepsilon)^k}$.

7.4) $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon$. et donc $\forall\varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon, k \geq k_\varepsilon \Longrightarrow \left|\left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} - \rho(A)\right| \leq \varepsilon$ c'est la définition de :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)}$$

Partie 3

On utilisera régulièrement qu'il est toujours possible d'ajouter des inégalités de même sens , et qu'on peut multiplier des inégalités de même sens si tous les termes sont positifs.

1.) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A \geq 0$, $A \neq 0$ mais pas $A > 0$

2.1) Soit $U = AA'$; $V = BB'$. $\forall i, j$, $u_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}a'_{k,j}$; $v_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k}b'_{k,j}$. Par hypothèse : $\forall i, j$, $0 \leq a_{i,j} \leq b_{i,j}$ et $0 \leq a'_{i,j} \leq b'_{i,j}$ donc $\forall i, j$, $0 \leq u_{i;j} \leq v_{i,j}$ $\boxed{0 \leq AA' \leq BB'}$

2.2) On prend $A' = A^{k-1}$ et $B' = B^{k-1}$ et on procède par récurrence : si $0 \leq A \leq B$ et si on suppose $0 \leq A^{k-1} \leq B^{k-1}$ on a $0 \leq A^k \leq B^k$. De plus la propriété est vraie si $k = 1$.

2.3) Rappelons que $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A = \max\left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$. Or pour une matrice positive $\forall i$, $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ et donc si $A \leq B$:

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} = \sum_{j=1}^n |b_{i,j}|$$

d'où en passant au max : $M_A \leq M_B$ donc $\underline{\widetilde{N}_\infty(A) \leq \widetilde{N}_\infty(B)}$

2.4) D'après 2.2) et 2.3) : $0 \leq A \leq B \Rightarrow \forall k,\, 0 \leq A^k \leq B^k \Rightarrow \widetilde{N}_\infty(A^k) \leq \widetilde{N}_\infty(B^k) \Rightarrow \left[\widetilde{N}_\infty(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \left[\widetilde{N}_\infty(B^k)\right]^{\frac{1}{k}}$ d'où en passant à la limite (II.7.4) :

$$\boxed{\rho(A) < \rho(B)}$$

2.5) Par hypothèse : $\forall i, j$, $0 \leq a_{i,j} < b_{i,j}$. Si $A \neq 0_n$, soit $c = \sup_{i,j}\{\frac{a_{i,j}}{b_{i,j}}\}$. On a un nombre fini de termes tous strictement inférieurs à 1 et non tous nuls donc $c \in]0,1[$. Si $A = 0_n$ tout $c \in]0,1[$ convient . $\forall i$, $a_{i,j} \leq cb_{i,j}$ donc $A \leq cB$
D'après 2.4) et II 7.2) : $\rho(A) \leq \rho(cB) = c\rho(B)$. Et $c\rho(B) < \rho(B)$ car $\rho(B) > 0$ (sinon 0 est la seule valeur propre de B et la trace de B est nulle , ce qui contredit l'hypothèse que tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs)

$$\boxed{\rho(A) < \rho(B)}$$

3.) Soit $X \in \mathbf{C}^n$, $\forall i$, $x_i = 1$. $AX = \alpha X$ donc $\boxed{\alpha \in Sp(A)}$ (et $\alpha \geq 0$ car la matrice est positive) . On en déduit que : $\alpha \leq \rho(A)$. Or pour cette matrice $M_A = \alpha$ et donc d'après II 2) : $\widetilde{N}_\infty(A) = \alpha$; II.4) donne alors $\rho(A) \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ donc : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(A) = \rho(A) = \alpha}$

4.) Remarquons que $\alpha < 0$ est absurde car A est positive.

- A étant positive $\widetilde{N_\infty}(A) = M_A = \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right)$ donc $\rho(A) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right)$ découle toujours du II.4)
- Si $\alpha = 0$ min $\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right) = \alpha \leq \rho(A)$ découle du 2.4 car $0_n \leq 0_n \leq A$ donc $\rho(0_n) \leq \rho(A)$
- Si $\alpha \neq 0$, la matrice B construite vérifie que la somme des termes de chaque ligne vaut α et donc $\rho(B) = \alpha$.Or par construction $0_n \leq B \leq A$ car $0 \leq \frac{\alpha}{\alpha_i} a_{i,j} \leq a_{i,j}$. donc d'après 2.4) $\rho(B) \leq \rho(A)$ et donc min $\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right) = \alpha = \rho(B) \leq \rho(A)$

$$\boxed{\min\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right) \leq \rho(A) \leq \max\left(\sum_{j=1}^n a_{i,j}\right)}$$

5.) D est diagonale à diagonale non nulle car X étant strictement positif a des coefficients non nuls.

$$\text{Soit } M = AD_x : \forall i, j \text{ , } m_{i,j} = x_j a_{i,j} \text{ . Soit } N = D_x^{-1}M : \forall i, j \text{ , } n_{i,j} = \frac{1}{x_i} m_{i,j} = \frac{x_j}{x_i} a_{i,j}$$

De plus A et N sont semblables donc $\rho(A) = \rho(N)$ .Reste à encadrer $\rho(N)$ avec la question précédente car N est positive :

$$\min_i \left(\sum_{j=1}^n n_{i,j}\right) \leq \rho(N) \leq \max_i \left(\sum_{j=1}^n n_{i,j}\right)$$

or $\sum_{j=1}^n n_{i,j} = \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n x_j a_{i,j} = \frac{(AX)_i}{x_i}$ donc d'après 4)

$$\boxed{\min_i \frac{(AX)_i}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_i \frac{(AX)_i}{x_i}}$$

6.) Si X est vecteur propre strictement positif de A : $AX = \lambda X$ et on peut appliquer 5) : $\forall i$, $\frac{(AX)_i}{x_i} = \lambda$ donc $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$ donc $\boxed{\lambda = \rho(A)}$; les ensembles $\left\{\min_i \frac{(AX)_i}{x_i} \text{ , } X > 0\right\}$ et $\left\{\max_i \frac{(AX)_i}{x_i} \text{ , } X > 0\right\}$ admettent $\rho(A)$ pour respectivement maximum et minimum .