PC 2 DEVOIR DU 4 DECEMBRE

LE SUJET SE COMPOSE DE 2 PROBLEMES ET COMPORTE 5 PAGES

SESSION 1998

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE-FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES 2

DURÉE : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée.

Les 2 parties sont totalement indépendantes.

PARTIE 1

Question 1.1: Soit f une fonction continue sur l'intervalle$[-1,1]$. Calculez la dérivée $F'(x)$ de la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longrightarrow F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} f(t)dt.$$

Question 1.2: Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de période T.

Montrez que la fonction $F : x \in \mathbb{R} \longrightarrow F(x)$ définie par

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt$$

est indépendante de x.

Soit m un paramètre réel tel que $0 \leq m \leq 1$. A chaque valeur de m on associe la fonction réelle u définie par

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - m\sin^2(t)}}.$$

Question 1.3: On commence par traiter deux cas particuliers.

a - Précisez le domaine de définition et calculez $u(x)$ pour $m = 0$.

b - Précisez le domaine de définition et calculez $u(x)$ pour $m = 1$.

Dans la suite on considère $0 < m < 1$.

Question 1.4:

a - Montrez que u est dérivable et donnez l'expression de $u'(x)$.

b - En déduire que u est croissante et impaire sur $\mathbb{R}$.

c - Montrez que

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = +\infty.$$

Question 1.5: Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, on définit

$$v(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}.$$

a - Etablir que $u(x) = v(x)$ dans cet intervalle.

b - La fonction $v(x)$ est-elle définie pour $x = \pi/2$? Admet-elle une limite en ce point ?

c - Montrez que $u(x+\pi) - u(x)$ est constante quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimez cette constante, qu'on notera $K(m)$, en fonction de $u(\pi/2)$.

Question 1.6:

a - Démontrez que u admet une fonction réciproque A définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donnez le sens de variation de A.

b - Calculez $A(x + K(m)) - A(x)$.

c - Exprimez A' et montrez que A'' vérifie

$$A'' + m \sin(A) \cos(A) = 0.$$

Question 1.7: Pour tout y réel, on note $x = A(y)$ et on définit les fonctions S, C et D par

$$S(y) = \sin(x), \quad C(y) = \cos(x) \ \text{ et } \ D(y) = \sqrt{1 - m\sin^2(x)}.$$

a - Etudiez la parité des 3 fonctions. Montrez qu'elle sont périodiques et donnez leur période en fonction de $K(m)$.

b - Exprimez les dérivées S', C' et D' en fonction de S, C et D.

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ECOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1994

<u>MATHÉMATIQUES</u>

DEUXIÈME ÉPREUVE

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES II

Ce problème est consacré à l'étude des fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbf{R}$, à valeurs complexes qui vérifient, pour tout x réel, l'équation $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} : \qquad f'(x) = \lambda\, f(x+1)\,,$$

où λ est un réel <u>strictement positif</u>. Il est admis que l'ensemble $\mathcal{E}(\lambda)$ de ces fonctions est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel complexe des fonctions dérivables définies sur $\mathbf{R}$.

La première partie met en évidence des propriétés communes aux fonctions appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}(\lambda)$. Les deuxième et troisième parties construisent des fonctions de cet ensemble.

Première partie.

I-1°) <u>Quelques résultats utiles dans la suite</u> :

a. Discuter suivant les valeurs du réel λ les solutions de l'équation : $t\,e^{-t} = \lambda$. Si cette équation a une solution, elle sera désignée par α ; si elle admet deux solutions, elles seront désignées par α, β avec $\alpha<\beta$; placer λ et 1 par rapport à ces solutions.

b. Soit s l'application : $t \mapsto \lambda\, e^t$. Étant donné un réel u_0 strictement positif, soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence : $u_n = s(u_{n-1})$, $n \geq 1$.
Discuter la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ suivant les valeurs de λ et de u_0 et, lorsqu'il y a convergence, préciser la limite. Dans la suite, on pose :

$$u_n = s_n(u_0)\ .$$

c. Soit ℓ un nombre réel strictement positif donné ; étudier, lorsque λ est strictement inférieur à $\frac{1}{e}$, la convergence de la série dont le terme général est défini par les relations :

$$v_0 = 1 \ ; \ v_n = \frac{\lambda^n}{n!}(\ell+n)^n, \ n \geq 1.$$

I-2°) Premières propriétés.

a. Démontrer que les fonctions de $\mathfrak{I}(\lambda)$ sont indéfiniment dérivables. Montrer
$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f^{(n)}(x) = \lambda^n$ f

b. Déterminer les fonctions polynômes qui appartiennent à $\mathfrak{I}(\lambda)$.

c. Quelles sont les fonctions exponentielles réelles ($x \mapsto e^{ax}$) qui appartiennent à $\mathfrak{I}(\lambda)$? Discuter suivant les valeurs de λ.

I-3°) Propriétés de stabilité de $\mathfrak{I}(\lambda)$.

a. Prouver que, si la fonction f appartient à $\mathfrak{I}(\lambda)$, il en est de même des fonctions réelles P et Q telles que : $f(x) = P(x) + i\,Q(x)$.

b. Soit a un réel ; démontrer que, si f est dans $\mathfrak{I}(\lambda)$, il en est de même de la fonction translatée $f_a : x \mapsto f(x-a)$.

c. Démontrer que l'application dérivation : $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathfrak{I}(\lambda)$.

d. Déterminer, pour toute fonction f de l'espace $\mathfrak{I}(\lambda)$, la ou les primitives appartenant à $\mathfrak{I}(\lambda)$.

I-4°) Fonctions paires, impaires de l'espace $\mathfrak{I}(\lambda)$.

a. Étant donnée une fonction f de $\mathfrak{I}(\lambda)$, soit g la fonction : $x \mapsto f(-x)$. Démontrer que, pour que la fonction g appartienne à $\mathfrak{I}(\lambda)$, il faut et il suffit que la fonction f vérifie la relation **R** :

R : pour tout x, $f(x+2) = -f(x)$.

Déterminer les fonctions f de l'espace $\mathfrak{I}(\lambda)$ qui vérifient cette relation **R**, en recherchant par exemple une équation différentielle vérifiée par f ; discuter suivant les valeurs de λ.

b. Pour quelles valeurs de λ existe-t-il dans $\mathfrak{I}(\lambda)$, un sous-espace vectoriel (autre que $\{0\}$) de fonctions paires ? de fonctions impaires ?

Deuxième partie.

Les fonctions de l'espace vectoriel $\mathfrak{T}(\lambda)$ sont des fonctions indéfiniment dérivables définies sur $\mathbb{R}$. Cette partie est consacrée à l'examen du développement en série entière des fonctions f de $\mathfrak{T}(\lambda)$. Il sera établi que toute fonction positive de $\mathfrak{T}(\lambda)$ est la somme d'une série entière.

II-1°) <u>Construction d'une fonction f à partir d'une fonction g définie sur l'intervalle</u> [0, 1].

Par définition, une fonction h définie sur l'intervalle [k, k+1], où k est un entier relatif, a la propriété P_k si et seulement si les deux propriétés ci-dessous ont lieu :

$$P_k : \quad \begin{cases} h \in C^\infty([k,k+1]) , \\ \forall\ p \in \mathbb{N}, \quad h^{(p+1)}(k) = \lambda\ h^{(p)}(k+1) \end{cases}$$

a. Soit f une fonction de $\mathfrak{T}(\lambda)$ dont la restriction f_0 à l'intervalle [0 , 1] est nulle. Démontrer que la fonction f est nulle.

b. Démontrer que la restriction h d'une fonction f quelconque de l'espace $\mathfrak{T}(\lambda)$ à l'intervalle [k, k+1] possède la propriété P_k, pour tout entier relatif k.

c. Soit réciproquement une fonction g_0 définie sur l'intervalle [0, 1] possédant la propriété P_0. Démontrer qu'il existe une unique fonction f de $\mathfrak{T}(\lambda)$ qui a pour restriction à l'intervalle [0, 1] cette fonction g_0.

d. Soit ψ la fonction définie sur l'intervalle [0, 1] par les relations :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \text{ , si } x = 0 \text{ et si } x = 1 \text{ ;} \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x(1-x)}\right) \text{ , si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Établir que cette fonction ψ est continûment dérivable sur [0, 1]. Il sera admis que la fonction ψ est indéfiniment dérivable sur ce même intervalle et que les dérivées successives ont mêmes valeurs que la dérivée première en 0 et en 1. Démontrer qu'il existe une fonction f, appartenant à $\mathfrak{T}(\lambda)$, dont la fonction ψ est la restriction à l'intervalle [0, 1]. Est-ce que cette fonction f est de signe constant sur la droite réelle ?