ECOLE DE l'AIR PSI 2003

1. **a)** la suite est définie par des produits .. . on étudie la quotient:
La suite est à termes strictement positifs donc le quotient et w_n sont bien définis.
$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2n+1}{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$
en élevant au carré la quantité positive
$$\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^2=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}\geq 1$$
donc (tout est positif) $v_{n+1}\geq v_n$
b) On a :
$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{4n^2+4n}\right)\sim\frac{1}{2}.\frac{1}{4n^2+4n}\sim\frac{1}{8n^2}$$
c) $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs convergente . donc par équivalent du terme général $\sum\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge . Dor $\sum\ln(v_{n+1})-\ln(v_n)$ converge . Et par comparaison suite <-> série la suite $(\ln(v_n))$ converge . Si λ est sa limite $(v_r$ converge vers $L=e^\lambda$ par continuité de $t->\exp(t)$ sur $\mathbb{R}$. On a donc
$$\boxed{u_n\sim\frac{L}{\sqrt{n}}}$$
Par croissance de la suite (v_n) on peut dire : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\leq L$ donc $\boxed{u_n\leq\frac{L}{\sqrt{n}}}$.
2. **a)**La fonction ϕ est C^∞ sur $[0,1[$ par composition : (x->1-x est C^∞ de $[0,1[$ dans $]0,1]$ et $t->\sqrt{t}$ est C^∞ sur $]0,1]$)
On voit que
$$\phi'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2},\phi"(x)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}\ ,\phi^{(3)}(x)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}(1-x)^{-5/2}$$
. On devine
$$\phi^{(n)}(x)=-\frac{1}{2^n}(1.3.\cdots(2n-3))(1-x)^{1/2-n}$$
On le vérifie par récurrence direcement ou mieux en revanant tout de suite à (u_n) :
$$\phi^{(n)}(x)=-\frac{u_n}{(2n-1)}(n!)(1-x)^{1/2-n}$$
   - si $n=1$ alors $-\frac{u_n}{(2n-1)}(n!)(1-x)^{1/2-n}=-\frac{1}{2}.1.(1-x)^{1/2-1}$ est correct
   - si $\phi^{(n)}(x)=-\frac{u_n}{(2n-1)}(n!)(1-x)^{1/2-n}$ alors
$$\begin{aligned}\phi^{(n+1)}(x)&=-\frac{u_n}{(2n-1)}(n!)\frac{2n-1}{2}(1-x)^{1/2-n-1}=-u_n(n!)\frac{1}{2}(1-x)^{1/2-n-1}\\&=-u_n\frac{2n+1}{2n+2}.\frac{n+1}{2n+1}.n!.(1-x)^{1/2-n}=-\frac{u_{n+1}}{2n+1}(n+1)!(1-x)^{1/2-(n+1)}\end{aligned}$$
$$\boxed{\phi^{(n)}(x)=-\frac{u_n}{(2n-1)}(n!)(1-x)^{1/2-n}}$$
b) pour une fonction C^{n+1} sur un intervalle I . la formule de Taylor avec reste intégrale dit que pour $(a,b)\in I^2$
$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\phi^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt$$
on prend $a=0$ et $b=x$
$$\phi(x)=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{2k-1}(x)^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)dt$$
$$\boxed{P_n(x)=1-\sum_{k=1}^n\frac{u_k}{2k-1}(x)^k}$$
en particulier $\underline{P_4(x)=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}}$

c) On a
$$|R_n(x)| \leq \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)\right| dt = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\frac{u_{n+1}}{(2n+1)}(n+1)!\,(1-x)^{1/2-n-1}\,dt$$
car $x-t \geq 0$. Comme $x \leq 1$ on a $x-t \leq 1-t$ donc en multipliant par des quantités positives.
$$(x-t)^n\,(1-x)^{1/2-n-1} \leq (1-t)^n\,(1-x)^{1/2-n-1} = (1-t)^{-1/2}$$
et $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)}u_n$ donc $\frac{1}{n!}\frac{u_{n+1}}{(2n+1)}(n+1)! = \frac{1}{2}u_n$.
Tout c'est bien simplifié pour trouver le résultat.
$$|R_n(x)| \leq \frac{u_n}{2}\int_0^x (1-t)^{-1/2}\,dt$$
Reste à intégrer
$$\int_0^x (1-t)^{-1/2}\,dt = -2\left[(1-t)^{1/2}\right]_0^x = 2\left(1-(1-x)^{1/2}\right) \leq 2$$

d) attention à x=1.
On a donc $\forall x \in [0,1[$, $\lim(R_n(x)) = 0$ et donc $|\phi(x) - P_n(x)| \leq u_n$. Les deux fonctions ϕ et P_n étant continue en 1 le résultat reste vrai par continuité en 1 .
Comme $\lim(u_n) = 0$ (1.c) on a $\forall x \in [0,1]$, $\lim(P_n(x)) = \phi(x)$ soit:
$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \sqrt{1-x} = 1 - \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2n-1}x^n}$$
La convergence est normale car $\left|\frac{u_n}{2n-1}x^n\right| \leq \frac{u_n}{2n-1} \leq \frac{L}{(2n-1)\sqrt{n}}$, série indépendante de x qui converge car $\frac{L}{(2n-1)\sqrt{n}} \sim \frac{L}{2}\frac{1}{n^{3/2}} > 0$ (et $3/2 > 1$)

e) On remarque que $|x| = \sqrt{1-(1-x)^2}$ avec $(1-x^2) \in [0,1]$ si $|x| \leq 1$. Donc
$$||x| - Q_N(x)| = \sqrt{1-(1-x)^2} - P_N(1-x) \leq u_N \leq \frac{L}{\sqrt{N}} \text{ d'après 1.c) et 2.c)}$$
or :
$$\begin{aligned}\frac{L}{\sqrt{N}} &\leq \frac{\varepsilon}{M} \iff \frac{L^2}{N} \leq \frac{\varepsilon^2}{M^2} \text{ (on peut élever au carré car out est positif)}\\ &\iff N \geq \frac{M^2L^2}{\varepsilon^2}\end{aligned}$$
remarque : en prenant $M = 1$ on trouve une suite de polynômes qui approche uniformément $|x|$ sur $[-1,1]$

3. **a)** On doit écrire l'équation du segment entre $\begin{pmatrix} \frac{k}{n} \\ f(\frac{k}{n}) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{k+1}{n} \\ f(\frac{k+1}{n}) \end{pmatrix}$. Donc
$$g(x) = f(\frac{k}{n}) + \frac{x-\frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f(\frac{k}{n})\right)$$

b) la forme proposée est l'équation barycentrique du segment avec $\alpha \in [0,1]$. on peut le retrouver avec l'expression ci-dessus $\alpha = k+1-nx \in [0,1]$ car $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$
On a donc sur $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$:
$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= \alpha f(\frac{k}{n}) + (1-\alpha)\,f(\frac{k+1}{n}) - (\alpha + (1-\alpha))\,f(x)\\ &= \alpha\left(f(\frac{k}{n}) - f(x)\right) + (1-\alpha)\left(f(\frac{k+1}{n}) - f(x)\right)\end{aligned}$$
on a donc comme $\alpha \geq 0$ et $1-\alpha \geq 0$ puis $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{n}$ et $\left|x - \frac{k+1}{n}\right| < \frac{1}{n}$
$$\begin{aligned} |g(x) - f(x)| &\leq \alpha\left|f(\frac{k}{n}) - f(x)\right| + (1-\alpha)\left|f(\frac{k+1}{n}) - f(x)\right|\\ &< \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\,\varepsilon = \varepsilon\end{aligned}$$

le résultat étant évident si $x=\frac{k}{n}$ ou $\frac{k+1}{n}$ car $0<\varepsilon$ est donc vrai sur $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ pour tout $k\in[[0,n-1]]$ donc su $[0,1]=\cup_{k=0}^{n-1}\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$

$$\boxed{\forall x\in[0,1]\ ,\ |g(x)-f(x)|<\varepsilon}$$

4. **a)**

- ϕ est linéaire car pour toutes fonctions g_1 et g_2 , pour tout scalaire λ et pour tout entier $k\in[[0,n]]$:

$$(g_1+\lambda g_2)\left(\frac{k}{n}\right)=g_1\left(\frac{k}{n}\right)+\lambda g_2\left(\frac{k}{n}\right)$$

- ϕ est injective car si $\phi(g)=0$, pour tout $k\in[[0,n]]$, $g(\frac{k}{n})=0$ la fonction g affine sur $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ y est nul . Elle es donc nulle sur $[0,1]$
- ϕ est surjective : même calcul qu'au 3.a : si $\phi(g)=(a_k)_{k=0}^n$ on a sur $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$: $g(x)=a_k+\frac{x-\frac{k}{n}}{\frac{1}{n}}(a_{k+1}-a_k)$

$$\boxed{\phi\text{ est un isomorphisme de }E_{n+1}\text{ sur }\mathbb{R}^{n+1}}$$

b) attention dans les calculs matriciels , les lignes et colonnes des matrices sont notées de 1 à $n+1$, alors que le $(f_k)\,,(a_k)...$ le sont de 0 à n. D'où un décalage de 1.

par exemple dans X $x_1=a_0,x_2=a_1\cdots$

Le sujet propose de montrer que $(\phi(f_j))_{j=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$. on en déduit que $(f_j)_{j=0}^n$ est une base de E_{n+1} ca l'image d'une base par un isomorphisme $\left(\phi^{-1}\text{ ici }\right)$ est une base

- pour $j\in[[0,n]]$, la fonction f_j est bien dans E_{n+1} :elle est affine égale à$\begin{cases} t-\frac{j}{n}\text{ sur }\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right] & \text{si } k\geq j\\ \frac{j}{n}-t\text{ sur }\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right] & \text{si } k<j\end{cases}$ donc $\phi(f_j)$ est bien défini.
- $\mathbb{R}^{n+1}$ est de dimension $n+1$ et la famille proposée est de cardinal $n+1$
- $\phi(g)$ a la matrice $\begin{pmatrix} g(0)\\ g(1/n)\\ \vdots\\ g((n-1)/n)\\ g(1)\end{pmatrix}$ donc $\phi(f_j)=\begin{pmatrix} j/n\\ \vdots\\ 1/n\\ 0\\ 1/n\\ \vdots\\ (n-j)/n\end{pmatrix}$. il semble que $Mat_{Bc}(\phi(f_j))=\frac{1}{n}A_{n+1}$;

  On peut vérifier que le terme général de $Mat_{Bc}(\phi(f_j))$ est $m_{i,j}=f_{j-1}\left(\frac{i-1}{n}\right)=\frac{|i-j|}{n}=\frac{a_{i,j}}{n}$
  la matrice de passage est inversible donc on a bien une base.

c) On a une base de E_{n+1} et g_α est élément de E_{n+1} . Donc g_α est combinaison linéaire de $(f_k)_{k=0}^n$.

On a $\phi(g_\alpha)=\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ a_n\end{pmatrix}$. Notons X cette matrice qui est la matrice de $\phi(g_\alpha)$ dans la base canonique Bc de $\mathbb{R}^{n+1}$

Comme la matrice de changement de base est $\frac{1}{n}A_{n+1}$ la formule de changement de base donne

$$Mat_{(\phi(f_j))}(\phi(g_\alpha))=\left(\frac{1}{n}A_{n+1}\right)^{-1}X=nB_{n+1}X$$

notée Y .Soit $\phi(g_\alpha)=\sum_{k=0}^n y_{k+1}\phi(f_k)$ .Et donc comme ϕ est un isomorphisme :$g_\alpha=\sum_{k=0}^{n+1}y_{k+1}f_k$.

On a donc

$$\boxed{\lambda_{k-1}=n\sum_{i=1}^{n+1}b_{k,i}a_{i-1}}$$

$$\lambda_k=\begin{cases}\frac{(1-n)}{2}a_0+\frac{n}{2}a_1+\frac{1}{2}a_n\text{ si }k=0\\ \frac{n}{2}a_{k-1}-na_k+\frac{n}{2}a_{k+1}\text{ si }k\in[[1,n]]\\ \frac{1}{2}a_0+\frac{n}{2}a_n+\frac{(1-n)}{2}a_{n+1}\text{ si }k=n+1\end{cases}$$

5. **a)** on a $g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ donc $\alpha = \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=0}^{n}$

   b) On décompose $f(x) - R(x) = (f(x) - g(x)) + (g(x) - R(x))$.

   on a $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ d'après $3.b$

   on a

$$|g(x) - R(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \, . \left| \left| x - \frac{k}{n} \right| - Q_N \left(x - \frac{k}{n} \right) \right|$$

   si on pose $X = x - \frac{k}{n}$ on a $|X| - Q_N(X)$ avec $X = x - \frac{k}{n} \in [-1, 1]$ car x et $\frac{k}{n}$ sont entre 0 et 1 . Donc :

$$|g(x) - R(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k| \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ par définition } M = \sum |\lambda_k|$$

   donc en regroupant

$$x \in [0, 1] \ , \ |f(x) - R(x)| \leq 2\varepsilon$$

   c) On a montré en prenant $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$:

$$\forall \varepsilon_1 \ , \exists R \in \mathbb{R}[\mathbb{X}] \ , \ \sup_{[0,1]} |f - R| \leq \varepsilon_1$$

   On a montré que sur $[0, 1]$ toute fonction continue peut être approchée uniformément par des polynômes.

   On peut alors passer à un intervalle quelconque par homothétie et translation

6. le déterminant vaut $(-1)^n \, .n.2^{n-1}$