EXERCICE

1. Partie

1. Pour prouver que la suite est définie on doit montrer que pour tout n u_n est non nul.
   Il est plus facile de vérifier par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$
   - pour $n = 0$ u_0 existe et est positif par hypothèse
   - si $u_n > 0$ alors u_{n+1} existe et u_{n+1} est la demi somme de deux réels strictement positifs donc $u_{n+1} > 0$
2. f est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$. f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}]$ puis croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$. de plus $f(x) \sim_0 \frac{a}{2}$ d'où une asymptote verticale , et au voisinage de $+\infty$ $f(x) = \frac{x}{2} + o(1)$ d'où une asymptote : $y = \frac{x}{2}$
3. On peut remarquer par les variations de f que : $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$
   On a alors $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{u_n} - u_n\right) = \frac{1}{2u_n}\left(\sqrt{a} - \sqrt{u_n}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{u_n}\right)$; les racines existent car pa hypothèse $a > 0$ et que $u_n \geq a > 0$
   comme $u_n \geq a$, $\sqrt{u_n} \geq \sqrt{a}$ et donc $\boxed{\forall n > 1 \text{ , } u_{n+1} < u_n}$
   La suite est donc décroissante minorée par $\sqrt{a}$. elle converge donc vers une limite $l \geq \sqrt{a}$. la fonction f étant continu sur $\mathbb{R}^+$ la limite est un point fixe .
   $f(l) = l \Leftrightarrow \frac{a}{l} - l = 0$ donc $l = \sqrt{a}$ (car $l \geq \sqrt{a}$)
4. La fonction étant C^2 on peut utiliser Taylor Young:
   $$f(\sqrt{a} + t) = f\left(\sqrt{a}\right) + tf'\left(\sqrt{a}\right) + \frac{t^2}{2}f"\left(\sqrt{a}\right) + o(t^2) = \sqrt{a} + \frac{t^2}{2\sqrt{a}} + o\left(t^2\right)$$
   On peut aussi partir de
   $$\frac{a}{t + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{1 + \frac{t}{\sqrt{a}}} = \sqrt{a}\left(1 - \frac{t}{\sqrt{a}} + \frac{t^2}{a} + o\left(t^2\right)\right)$$
5. On a
   $$\alpha_{n+1} = f\left(u_n\right) - \sqrt{a} = f(\sqrt{a} + \alpha_n) - \sqrt{a} = \frac{\alpha_n^2}{2\sqrt{a}} + o\left(\alpha_n^2\right)$$
   et comme α_n tend vers 0:
   - Si $\alpha_n \neq 0$ on prend le premier terme du développement précédent donc $a_{n+1} \sim \frac{\alpha_n^2}{2\sqrt{a}}$
   - Si $\alpha_n = 0$ on a $u_n = \sqrt{a}$, les deux suites (a_n) et (α_{n+1}) sont stationnaires nulles donc on a encore l'équivalent.
   - remarque : les 2 dernières questions étant évidentes pour la suite stationnaire nulle , je ne les rédige que si $\forall n$ $\mathbb{N}, u_n \neq \sqrt{a}$ (ce qui équivaut à $u_0 \neq \sqrt{a}$)
6. Soit $v_n = 2^n\alpha_n$. On utilise la règle de D'Alembert v_n étant à termes strictement positifs d'après la question 3 et l remarque précédente:
   $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2.\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{a}}\alpha_n$$
   Or la suite (α_n) converge vers 0 . Donc $\lim\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = 0 < 1$. d'après la règle de D'Alembert $\sum v_n$ converge.
   On en déduit que la suite (v_n) tend vers 0 : $\lim\left(\frac{\alpha_n}{2^{-n}}\right) = 0$ donc $\boxed{\alpha_n << 2^{-n}}$
7. On recommence avec $w_n = n!\alpha_n$ et la série $\sum w_n$.
   $$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(n+1\right)\alpha_n << \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(n+1\right)2^{-n} \longrightarrow_{n->+\infty} 0$$
   la série $\sum w_n$ converge donc la suite (w_n) converge.
   remarque : comme $\frac{1}{n!}$ tend très vite vers 0 la suite (u_n) converge vite vers sa limite

2. Partie

Montrons d'abord par récurrence que M_n est diagonale et cherchons la relation de récurrence vérifiée par les termes diagonaux de M_n .

- Pour $n = 0$, $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonale .
- Si $M_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & 0 \\ 0 & 0 & c_n \end{pmatrix}$ alors $M_n^{-1} = \begin{pmatrix} a_n^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b_n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c_n^{-1} \end{pmatrix}$ et $M_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{2}{b_n}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{3}{a_n}\right) \end{pmatrix}$

Donc par récurrence M_n est diagonale . De plus les trois suites (a_n) , (b_n) , (c_n) vérifient les hypothèses de la première partie donc elles sont définies sur $\mathbb{N}$, et leur limite est connue.
Une suite de matrice converge si et seulement chaque suite coordonnée converge , et les coordonnées de la limite sont les limites des coordonnées.

$$\lim (M_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

remarque 5/2 : Le sujet d'origine faisait l'étude de matrices diagonalisables.