

Le sujet est constitué de **deux problèmes indépendants** que le candidat pourra traiter dans un ordre indifférent.

PROBLÈME 1

1. On considère dans cette question la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k} \right)$$

- (a) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \sqrt{n} u_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
- (b) Étudier la nature de la série de terme général $w_n = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On note L sa limite.
Comparer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les réels u_n et $\frac{L}{\sqrt{n}}$.

2. On considère dans cette question la fonction $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x}$ pour $x \in [0, 1]$.

- (a) Déterminer la dérivée d'ordre n de $\varphi : x \mapsto \varphi^{(n)}(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
- (b) Soit $x \in [0, 1]$. La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à φ sur $[0, x]$ s'exprime sous la forme $\varphi(x) = P_n(x) + R_n(x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré n et

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \varphi^{(n+1)}(t) dt$$

Exprimer les coefficients de P_n en fonction de n . Donner la valeur de P_4 .

- (b) Démontrer la majoration

$$\forall x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq \frac{1}{2} u_n \int_0^x (1-t)^{-1/2} dt$$

On pourra remarquer que $x-t \leq 1-t$.

En déduire que

$$\forall x \in [0, 1[, |R_n(x)| \leq u_n$$

- (c) Démontrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction φ .

Dans la question suivante, on note Q_n le polynôme tel que $Q_n(x) = P_n(1-x^2)$

- (d) Soit ε un réel strictement positif et M une constante strictement positive.

Démontrer que si l'entier naturel N vérifie $N \geq \frac{L^2 M^2}{\varepsilon^2}$, alors

$$\forall x \in [-1, 1], \left| |x| - Q_N(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

3. On considère dans toute la suite du problème 1 une fonction f continue sur $[0, 1]$ et ε un réel strictement positif.

On admet qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1], |x - y| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dans la suite du problème 1, n désigne l'entier ainsi défini.

- (a) Soit g la fonction telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n, g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et g est affine sur chacun des intervalles $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], 0 \leq k \leq n-1$

Déterminer l'expression de $g(x)$ lorsque $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$.

- (b) Démontrer que $\forall x \in [0, 1], |g(x) - f(x)| < \varepsilon$. On pourra remarquer que l'on peut écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = \alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + (1 - \alpha)f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

3. Dans cette question, on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices $A_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 2 \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ de terme général } (a_{i,j} = |i-j|)_{1 \leq i,j \leq n+1}$$

$$\text{et } B_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \text{ de terme général : } \begin{cases} b_{i,i} = -1 \text{ si } i \neq 1 \text{ et } i \neq n+1 \\ b_{1,1} = b_{n+1,n+1} = \frac{1-n}{2n} \\ \text{si } |i-j|=1 \text{ alors } b_{i,j} = \frac{1}{2} \\ b_{1,n+1} = b_{n+1,1} = \frac{1}{2n} \\ b_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On admettra que A_{n+1} est inversible et que $A_{n+1}^{-1} = B_{n+1}$: ce résultat est démontré en partie à la question 6.

- (a) Soit E_{n+1} l'espace vectoriel des fonctions g définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} telles que g soit affine sur chacun des intervalles $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], 0 \leq k \leq n-1$.

Soit d'autre part Φ l'application de E_{n+1} dans \mathbb{R}^{n+1} telle que

$$\forall g \in E_{n+1}, \Phi(g) = \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0 \leq k \leq n}$$

Démontrer que Φ est un isomorphisme de E dans \mathbb{R}^{n+1} et expliciter l'unique fonction $g_\alpha \in E_{n+1}$ telle que $\Phi(g) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ où $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- (b) Pour tout entier j , $0 \leq j \leq n$, on note $f_j \in E_{n+1}$ l'application

$$t \longmapsto f_j(t) = \left| t - \frac{j}{n} \right|$$

Montrer que la famille $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de E_{n+1} : on pourra par exemple expliciter la matrice de la famille des vecteurs $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$, dans la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

- (c) Soit $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $g_\alpha \in E_{n+1}$ la fonction définie à la question 4°a), telle que $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $g_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) = a_k$.

Démontrer qu'il existe $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall x \in [0, 1], g_\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k(x)$$

Déterminer la valeur des coefficients λ_k , $0 \leq k \leq n$ en fonction de (a_0, a_1, \dots, a_n) .

4. La lettre g désigne dans cette question la fonction étudiée à la question 3°a) et Q_N le polynôme obtenu à la question 2°e) pour la valeur $\varepsilon > 0$ et la valeur $M = \sum_{k=0}^n |\lambda_k|$.

- (a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $g = g_\alpha$.
En déduire à l'aide de f la valeur des coefficients λ_k , $1 \leq k \leq n-1$, obtenus à la question 4°c).

- (b) On pose

$$\forall x \in [0, 1], R(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k Q_N\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

Démontrer que

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - R(x)| \leq 2\varepsilon$$

- (c) Quel théorème vient-on ainsi de démontrer ?

5. On revient sur la matrice A_{n+1} étudiée à la question 4.

Calculer $\det(A_{n+1})$ en fonction de n : on effectuera les opérations suivantes :
pour i allant de $n+1$ à 2 remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i - L_{i-1}$
pour j allant de 2 à $n+1$ remplacer la colonne C_j par la colonne $C_j + C_1$.
En déduire que A_{n+1} est inversible.