ENSAIT concours d'entrée A mathématiques 2

Les questions du sujet initial relative à la diagonalisation des matrices ont été retirées.

I) $n = 2,\ a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$

1. L_0 est de degré au plus 2 et admet les racines 1 et 2 . donc il existe un réel k tel que $L_0 = k(X-1)(X-2)$, la valeur en 0 donne $k = 1/2$. De lmême pour L_1 et L_2 .

$$\boxed{L_0 = \frac{(X-1)(X-2)}{2}\ ;\ L_1 = -X(X-2)\ ;\ L_2 = \frac{X(X-1)}{2}}$$

soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aL_0 + bL_1 + cL_2 = 0$, $P(0) = 0$ donc $a.1 + b.0 + c.0 = 0$ et donc $a = 0$. $P(1) = P(2) = 0$ donnent $b = c = 0$

(L_0, L_1, L_2) est une famille libre de 3 éléments dans un espace vectoriel de dimension 3

$$\boxed{(L_0, L_1, L_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

Tout polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ se décompose de façon unique : il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aL_0 + bL_1 + cL_2$ Le même calcul donne $a = P(0) \cdots$

$$\boxed{\text{les composantes dans } \mathcal{B}' \text{ de } P \text{ sont } (P(0), P(1), P(2))}$$

2. La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$: les colonnes sont les coordonnées des L_i sur $\left(1, X, X^2\right)$

3. On sait que $X = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$ est la matrice de P dans la base $\mathcal{B}'$. le sujet impose que X soit aussi la matrice des coordonnées dans $\mathcal{B}$.

La formule de changement de base donne $Mat_{\mathcal{B}}(P) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')Mat_{\mathcal{B}'}(P)$. donc ici :

$$X = AX$$

d'où le système en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = x \\ y = -\frac{3}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z \\ z = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ -\frac{3}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0 \\ \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$ $L_2 - L_3$ donne $y = -x$

$\cdots \begin{cases} x \text{ quelconque} \\ y = x \\ z = -x \end{cases}$

donc

$$\boxed{\left(P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2\right) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(1 + X - X^2)}$$

II) Retour au cas général

1. Soit $(\lambda_0, \ldots \lambda_k) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$, on a : $\forall k \in \{0, ..n\}$, $P(a_k) = \lambda_k$

Pour prouver que la famille est libre on prend $0 = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$ et donc pour tout $k \in [[0, n]]$, $\lambda_k = 0$

$(L_k)_{0 \le k \le n}$ est une famille libre de $(n+1)$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $(n+1)$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ se décompose $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$ et le même calcul donne $\lambda_k = P(a_k)$

$$\boxed{\text{les composantes dans } \mathcal{B}' \text{ de } P \text{ sont } (P(a_0), P(a_1), \ldots P(a_n))}$$

2. A est une matrice de changement de base , donc A est inversible.

   De plus A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ donc A^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ .Les coefficients de A^{-1} sont donc les coordonnées de X^j dans la base L_i . or d'après le calcul de la question précédente.

$$\forall j \in \{0,..n\} \ , \ X^j = \sum_{i=0}^{n} a_i^j L_i$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_i & a_i^2 & & a_i^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n+1}} \text{ avec } m_{ij} = a_{i-1}^{j-1}}$$

   attention aux indices : pour la base ils vont de 0 à n alors que pour les lignes d'une matrice ils commenceznt à 1 .

3. Soit $Q = \sum_{i=0}^{n} L_i$, Q est l'unique polynôme de degré au plus n tel que pour tout i $Q(i) = 1$. (les coordonnées ont été calculé à la question 1) . Une solution évidente est $Q = 1$. C'est la seule par unicité.

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} L_i = 1}$$

   Les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $\sum_{i=0}^{n} L_i$ sont donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et dans la base $\mathcal{B}'$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ La formule de changement de base donne donc :

$$Mat_{\mathcal{B}}(P) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')Mat_{\mathcal{B}'}(P)$$

   soit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

   or le produit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ revient à faire la somme des termes d'une ligne donnée de A.

   $\boxed{\text{la somme des éléments de la première ligne de A est égale à 1 et la somme des éléments de toutes les autres lignes est égale à 0}}$

III) Etude du cas $\mathbf{a}_0 = 0$

1. La première coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ de L_j est la constante du polynôme donc $L_j(0)$, donc $\boxed{\text{la première ligne de la matrice } A \text{ est (}}$

2. Comme au I , on cherche à résoudre $AX = X$ .avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On veut donc résoudre $(A - I_n)X = (0)$. On cherche donc à prouver qu'il existe des éléments non nuls dans le noyau de $A - I_n$. Or d'après le calcul précédent la première ligne de $A - I_n$ est une ligne nulle. $A - I_n$ n'est pas inversible ; son noyau n'est pas réduit à 0.

$$\exists P \neq 0 \ , \ P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)X^i$$

IV) Etude du cas $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2, ...a_n = n$

1. $L_{0,0} = 1$, $\forall k \in \{1, ..n\}$, $L_{k,k} = \prod_{i=0}^{k-1} \dfrac{(X-i)}{(k-i)} = \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(X-i)}{k!}$ car $\prod_{i=0}^{k-1}(k-i) = \prod_{j=1}^{k} j$ en posant $j = k - i$

   Donc le degré de $L_{k,k}$ est égal à k

   $(L_{0,0}, L_{1,1}, ..., L_{n,n})$ est une famille de polynômes vérifiant $d^\circ(L_{i,i}) = i$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$

   $$\boxed{\mathcal{B}'' = (L_{0,0}, L_{1,1}, ..., L_{n,n}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

2.
   1. Si $j \in \mathbb{N}$, $L_{k,k}(j) = 0$ si $j < k$, par définition de $L_{k,k}$. toujours par définition $L_{k,k}(k) = 1$.

      pour $j > k$: $L_{k,k}(j) = \dfrac{\prod_{i=0}^{k-1}(j-i)}{k!} = \dfrac{\prod_{i=j-k+1}^{j} i}{k!} = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}$

      $$\boxed{\forall k \geq j : L_{k,k}(j) = \tbinom{j}{k}}$$

   2. on a $\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i} = (1-1)^j$ d'après la formule du binôme de Newton . Donc pour $j > 0$ $\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i} = 0$.
      Pour $j = 0$ $\sum_{i=0}^{0}(-1)^i\binom{0}{i} = (-1)^0.1 = 1$

      $$\boxed{\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\tbinom{j}{i} = \begin{cases} 0 \text{ si } j > 0 \\ 1 \text{ si } j = 0 \end{cases}}$$

   3. Si $P = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k L_{k,k}$, $\forall j \leq n$, $P(j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k L_{k,k}(j) = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{j}{k} = \begin{cases} 0 \text{ si } j > 0 \\ 1 \text{ si } j = 0 \end{cases}$. des racines de $P = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k L_{k,k}$ sont $1, 2, ..., n$. Mais le polynôme est degré n . on a toutes les racines et elle sont simples.

      $$\boxed{\text{les racines de } P = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k L_{k,k} \text{ sont } 1, 2, ..., n}$$

      il existe donc un réel K tel que $P = K\prod_{i=1}^{n}(X-i)$. Or $P(0) = 1$ d'après le cas particulier $j = 0$ ci dessus . Donc

      $$\boxed{P = \tfrac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}(i-X)}$$

3.
   1. Soit $P_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}")$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$

      $\forall j \in \{0, ..n\}$, $L_{j,j} = \sum_{i=0}^{n} L_{j,j}(i) L_{i,n} = \sum_{i=0}^{j}\binom{i}{j}L_{i,n}$ donc $\boxed{P_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}") = (m_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n+1 \\ 1\leq j\leq n+1}} \text{ , avec } m_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} \text{ si } j \leq i \\ 0 \text{ si } j > i \end{cases}}$

      $P_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$ est donc une matrice triangulaire inférieure

   2. $A = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}").P_{\mathcal{B}''}(\mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}") \times (P_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}"))^{-1}$
      Comme, pour tout k, le degré de $L_{k,k}$ est égal à k, la matrice $P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}")$ est triangulaire supérieure
      La matrice inverse d'une matrice triangulaire inférieure étant triangulaire inférieure , $(P_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}"))^{-1}$ est triangulaire inférieure

3. $n=2,\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2$ Les calculs donnent :

$$P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}") = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ (P_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}"))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}") = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$