EXERCICE

1. Pour tout u réel la dérivée de la fonction $h_u : v -> h(u,v)$ est nulle : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\exists K \in \mathbb{R}$, $h_u(v) = K$.

   On note alors h_1 la fonction $u -> K$. On a bien $h(u,v) = h_1(u).h_1$ devant être C^1 car h l'est.

   La réciproque est évidente.

$$\boxed{\left(h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial v} = \widetilde{0}\right) \Longleftrightarrow \left(\exists h_1 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, h(x,y) = h_1(x)\ \right)}$$

2.

   1.
      - Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car ses fonctions coordonnées $(u,v) \mapsto ue^v$ et $(u,v) \mapsto e^{-v}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

      - Φ est à valeurs dans Ω : pour tout couple (u,v) de réels ue^v est un réel et e^{-v} est un réel strictement positif.
      - Φ est surjective : $\forall (x,y) \in \Omega, \left(x = ue^v, y = e^{-v}\right) \Longleftrightarrow (v = -\ln y, u = xy)$. donc le couple (x,y) de Ω admet un unique antécédent $(u = xy, -\ln(y))$ dans $\mathbb{R}^2$
   2. D'Après ce qui précède, on a: $\Phi^{-1}(x,y) = (xy, -\ln y)$ qui est de classe C^1 sur Ω, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1^{-1} : (x,y) \mapsto xy$ et $\Phi_2 : (x,y) \mapsto -\ln y$ sont de classe C^1 sur Ω, en tant que produit et composé de fonctions de classe C^1 sur Ω.

$$\boxed{\Phi \text{ est un } C^1 \text{ difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur } \Omega}$$

3.

   1. $f^* = f \circ \Phi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ par composition de Φ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe C^1 sur $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Omega$. On a les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^*}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u,v).\frac{\partial f}{\partial x}(ue^v, e^{-v}) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v).\frac{\partial f}{\partial y}(ue^v, e^{-v}) = e^v \frac{\partial f}{\partial x}(ue^v, e^{-v}) \\
\frac{\partial f^*}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u,v).\frac{\partial f}{\partial x}(ue^v, e^{-v}) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v).\frac{\partial f}{\partial y}(ue^v, e^{-v}) = ue^v \frac{\partial f}{\partial x}(ue^v, e^{-v}) - e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}(ue^v, e^{-v})
\end{aligned}$$

   2. D'Après la question précédente, on a:

$$\frac{\partial f^*}{\partial v}(u,v) = ue^v \frac{\partial f}{\partial x}(ue^v, e^{-v}) - e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}(ue^v, e^{-v}) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0,$$

   donc l'équation équivaut à l'existence d'une fonction F C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 : f^*(u,v) = F(u)$ et par suite $f(x,y) = f \circ \Phi(u,v) = f^*(u,v) = F(u) = F(xy)$

$$\boxed{\left(\forall (x,y) \in \Omega\ , x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\exists F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \Omega, f(x,y) = F(xy)\right)}$$

4.

   1. Les application linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent sous la forme $g(x,y) = \alpha x + \beta y$, donc $x\dfrac{\partial g}{\partial x} - y\dfrac{\partial g}{\partial y} = ax + by \Longleftrightarrow \alpha x - \beta y = ax + by$,On peut donc prendre $\underline{g(x,y) = ax - by}$.
   2. f est alors solution de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = ax + by$ si et seulement si $f - g$ est solution de $x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, Il existe donc $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(f - g)(x,y) = F(xy)$

$$\boxed{\left(\forall (x,y) \in \Omega\ , x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = ax + by\right) \Longleftrightarrow \left(\exists F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall (x,y) \in \Omega, f(x,y) = ax - by + F(xy)\right)}$$

PROBLÈME.

PREMIERE PARTIE

1.

1.

- La fonction est continue sur $]0,+\infty[$ positive si $b \geq a$, négative sinon..
- sur $]0,1]$: on sait que $e^t =_{t->0} 1+t+o(t)$, donc $\lim\limits_0 \left(\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right) = b-a$. La fonction se prolonge par continuité en 0. Elle est intégrable sur $]0,1]$
- Sur $[1,+\infty[$. comme $a>0$ et $b>0$ $\lim\limits_{+\infty} \left\{t^2\left(\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right)\right\} = 0$. La fonction est donc intégrable sur $[1,+\infty[$

2.

- $I(a,b) = -I(b,a)$ est évident.
- Si on fait le changement de variable : $u = ta$ qui est C^1 bijectif de $\mathbb{R}^+$ sur lui même (car $a>0$) on obtient ::

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-e^{-\frac{b}{a}u}}{u/a}\frac{du}{a} = I\left(1,\frac{b}{a}\right)$$

3. Si on pose pour $x \geq 1$ et $t>0$: $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$

1.

- $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$
- $\forall x \geq 1$, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.(c'est $I(1,x)$)
- On a domination sur tout segment $[a,b] \subset [1,+\infty[$::

$$\forall x \in [a,b] \subset [1,+\infty[\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \left|\frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}\right| = \frac{e^{-t}-e^{-xt}}{t} \leq \frac{e^{-t}-e^{-bt}}{t}$$

qui est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [1,+\infty[}$$

2.

- On a déjà les hypothèses de continuité.
- De plus $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{e^{-t}-e^{-xt}}{t}$ est C^1 sur $[1,+\infty[$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-xt}$
- $\forall x \geq 1$, $t \mapsto e^{-xt}$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.(fonction de référence)
- On a domination sur tout segment $[a,b] \subset [1,+\infty[$:

$$\forall x \in [a,b] \subset [1,+\infty[\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$$

continue, intégrable sur $[0,+\infty[$.

- Donc φ est de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, avec $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$.

3. On a: $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$ continue sur $[1,+\infty[$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K=0$ et donc $\forall x \geq 1$, $\varphi(x) = \ln x$
4. Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$

- Si $b \geq a$, alors $x = \dfrac{b}{a} \geq 1$, donc $I(a,b) = I(1,\dfrac{b}{a}) = \varphi\left(\dfrac{b}{a}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.
- Si $b \leq a$, alors $x = \dfrac{a}{b} \geq 1$, donc:

$I(a,b) = -I(b,a) = -I(1,\dfrac{a}{b}) = -\varphi\left(\dfrac{a}{b}\right) = -\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

- Conclusion:

$$\boxed{\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2, I(a,b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

.

2.

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est continue positive sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0 donc

$$\underline{t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t} \text{ est intégrable sur }]0,1]}$$

.

2. On cherche à intégrer $\displaystyle\sum_0^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$
   - Si $x \in [0,1[$, les deux théorèmes d'intégration termes à termes sur un segment s'appliquent. Mais pas si $x=1$ il n'y a pas CVN ni convergence de $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n|$
   - Si $x=1$ les 5/2 peuvent s'en sortir avec le bon théorème de continuité des séries entières
   - démonstration générale : On intègre $\displaystyle\sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$$

Or sur $[0,1]$ $0 \leq \dfrac{1}{t+1} \leq 1$ et donc $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)} \leq \frac{1}{n+2}$, et donc par encadrement $\lim \left(\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}dt\right) = 0$. La somme partielle tend vers l'intégrale.
Donc:

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \ , \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)}$$

3. On veut intégrer termes à termes la séries $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k+1} = \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur l'intervalle $]0,1]$. On pose pour $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_k(x) = \dfrac{(-1)^k x^k}{k+1}$ et $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
   - Les fonctions f_k sont continues sur le segment $[0,1]$ donc y sont intégrables , ainsi que sur $]0,1]$
   - $\displaystyle\sum_0^{+\infty} f_k$ converge simplement sur $]0,1]$ vers f qui continue (et même intégrable) sur $]0,1]$
   - $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_k| = \sum \int_{à}^1 \frac{x^k dx}{k+1} = \sum \frac{1}{(k+1)^2}$ est bien une série convergente.
   - donc

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_{à}^1 \frac{x^k dx}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k)^2}$$

   - Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On fait la différence des expressions pour garder les termes pairs:

$$\frac{\pi^2}{6} - I = 2 \sum_{\text{k pair}} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \text{ en posant } n = 2k$$

d'où :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}}$$

Deuxième partie

1.

1. g est la primitive d'une fonction continue donc g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$
2. On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   De plus $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ tend vers $g'(0) = f(0) = \psi(f)(0)$ si x tend vers 0 . donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\boxed{\psi(f) \in E}$.
3.
   - le résultat est évident si $x = 0$: on a toujours $0 \leq \sqrt{f(0)} = \sqrt{f(0)}$
   - Et pour $x > 0$: $\sqrt{f} \geq 0$ donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geq 0$.
     D'autre part: en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura:
     $$\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \leq \sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{x}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$
     d'où en divisant par x :
     $$\boxed{0 \leq \psi(\sqrt{f}) \leq \sqrt{\psi(f)}}$$
   - On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.
     Réciproquement si $f = C$ (constante) $\psi(f) = C$ et l'égalité est vérifiée
     $$\psi(\sqrt{f}) = \sqrt{\psi(f)} \text{ si et seulement si } f \text{ est constante}$$
     et $0 = \psi(\sqrt{f})$ si et seulement si f est nulle.

2.

1. Il est clair que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, aussi bien pour $x \neq 0$ que pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
   D'autre part d'après **II.1.b)** $\forall f \in E$, $\psi(f) \in E$, , donc ψ est un endomorphisme de E.
2.
   $$f \in \text{Ker } (\psi) \Longrightarrow \forall x > 0, \int_0^x f(t)dt = 0 \Longrightarrow \forall x>0, g'(x) = f(x) = 0,$$
   Mais f est aussi continue en 0 donc $f(0) = 0$ et donc $f = \widetilde{0}$ (sur $\mathbb{R}^+$)
   Donc
   $$\boxed{\psi \text{ est injective}}$$
   .
3. D'Après 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être dans l'image , . $F(x) = |x - a|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas dans l'image si $a > 0$
   $$\boxed{\psi \text{ n'est pas surjective}}$$

3.

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, les coefficients étant continues , et celui de $f'(x)$ n'ayant pas de racine $\mathbb{R}^{+*}$ .Donc la solution est: :
   $$f(x) = Ke^{-\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda} t dt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$
2. f est prolongeable en 0^+si et seulement si $\lim\limits_{x\to} f(x)$ est finie c'est à dire si et seulement si $\dfrac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ et donc si et seulement si $0 < \lambda \leq 1$.

4.

1. 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car le noyau est réduit à $\widetilde{0}$

2. Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \dfrac{1}{\mu}\psi(f)$ car $\mu \neq 0$ De plus d'après **II.1.1**) on dire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$,comme quotient (à dénominateur non nul) de fonctions C^1 donc f aussi.
3. Soit μ valeur propre de ψ et f vecteur propre associé, donc $\psi(f)(x) = \mu f(x)$, d'où $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \mu x f(x)$, en dérivant cette égalité (on sait que f est C^1) on obtient: $\mu x f'(x) + (\mu - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont: $f(x) = Kx^{\frac{1-\mu}{\mu}}$, dérivables sur $]0, +\infty[$. Comme on cherche des éléments de E on doit avoir un prolongement par continuité en 0 et donc $\mu \in]0, 1]$.
   Réciproquement si $f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ avec $\lambda \in]0, 1[$ on vérifie que
   $$\psi(f)(x) = \begin{cases} 0 = \lambda f(0) \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}K\displaystyle\int_0^x Kt^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}dt = \dfrac{1}{1+\frac{1-\lambda}{\lambda}}Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}+1-1}\lambda f(x) \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$
   idem si $\mu = 1$, seule la valeur en 0 change.
   $$\boxed{Sp(\psi) =]0, 1] \text{ , et } \forall\lambda \in]0, 1] \text{ , } E_\lambda(\psi) \text{ est la droite Vect}(x- > x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}})}$$

Troisième partie

1.

   1. fg est continue sur $\mathbb{R}^+$, et $|fg| \leq \dfrac{|f^2| + |g^2|}{2}$ assure l'intégrabilité de fg par majoration par une fonction intégrable (combinaison linéaire de deux fonctions intégrables)
      Donc
      $$\boxed{fg \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}^+}$$
   2. On a alors un sous espace vectoriel de E :
      - on a un sous ensemble de E
      - non vide : l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2,
      - Si $(f, g) \in E_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors: $(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ est intégrable car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f + \lambda g \in E_2$
        $\underline{E_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$
   3.
   - La fonction fg étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est bien un réel.
   - Symétrie évidente : $(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g, f)$.
   - linéarité à gauche : $(f + \lambda g, h) = (f, h) + \lambda(g, h)$, car l'intégrale est linéaire
   - linéarité à droite par symétrie.
   - définie positivité:
     -> $(f, f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive
     ->$(f, f) = 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \Longrightarrow f^2 = 0$, car f^2 continue positive, donc $f = 0$.
   $$\boxed{(f, g)- > \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt \text{ est un produit scalaire sur } E_2}$$

2.

   1. $\dfrac{g^2(t)}{t} = \dfrac{g(t)}{t}g(t)$ de limite $f(0)g(0) = 0$ d'après le **II.1.1** et la continuité de g .
   2. $t- > \dfrac{g^2(t)}{t^2}$
      - est continue sur $]0, b]$,

- intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0
- $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$,

3. On fait une intégration par parties sur $[\varepsilon, b]$, avec $u = g^2(t), v' = \dfrac{1}{t^2}$ fonctions C^1 sur l'intervalle:, avec $u' = 2g'(t)g(t)$ et $v = -\dfrac{1}{t}$,:

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_\varepsilon^b + 2\int_\varepsilon^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &= \frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{g^2(b)}{b} + 2\int_\varepsilon^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt\end{aligned}$$

   - or $g' = f$ et $\dfrac{g(t)}{t} = \psi(f)(t)$ donc :

   $$\int_\varepsilon^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt = \frac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon} - b\psi(f)(b) + 2\int_\varepsilon^b f(t)\psi(f)(t)dt$$

   si ε tend vers 0 , la première intégrale à une limite (fonction intégrable sur $]0,b]$) la seconde aussi ($f.\psi(f)$ est continue sur le segment $[0,b]$) et $\dfrac{g^2(\varepsilon)}{\varepsilon}$ tend vers 0.

   $$\boxed{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = -b\left(\psi(f)(b)\ \right)^2 + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt}$$

4. b étant positif $b\left(\psi(f)(b)\ \right)^2$ est positif et donc :

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)dt \leq 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \leq 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}$$

   en appliquant Cauchy Schwarz.

5.
   - si $\forall b, \displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$ alors $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt$ admet une limite nulle en $+\infty$
   - sinon $\exists b_1 \displaystyle\int_0^{b_1} \psi(f)^2(t)dt > 0$ et donc pour $b > b_1$ on a $\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt > 0$ et on peut diviser par $\sqrt{\displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}$. La fonction $b- > \displaystyle\int_0^b \psi(f)^2(t)dt$ est croissante (primitive d'une fonction positive) majorée par $4\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ admet une limite finie si b tend vers $+\infty$

   Dans les deux cas $\psi(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(f)^2(t)dt \leq 4\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$. En prenant les racines carrées:

   $$\boxed{\psi(f) \in E_2 \text{ et } \|\psi(f)\| \leq 2\|f\|}$$

6. ψ_2 est donc lipschitzienne (de rapport 2) donc continue. .

3.

1. On a d'après **III.2.2** :

$$2\int_0^x f(t)\psi(f)(t)dt - \int_0^x \psi(f)^2(t)dt = x\left(\psi(f)(x)\ \right)^2$$

   donc $x\left(\psi(f)(x)\ \right)^2$ admet une limite finie : $2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt - \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(t)dt$ (la première intégrale converge d'après **III.1.1** car f est dans E_2 par hypothèse et $\psi(f)$ d'après **III.2.4**)

   Si la limite l était non nulle on aurait $\left(\psi(f)(x)\ \right)^2 \sim_{+\infty} \dfrac{l}{x}$, ce qui contredit l'intégrabilité de $\psi(f)^2$ sur $\mathbb{R}^+$

   $$\boxed{\lim_{+\infty}\left(\left(\psi(f)(x)\ \right)^2\right) = 0}$$

2. On améliore le passage à la limite précédent : comme $l=0$

$$2\int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt = \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(t)dt$$

et donc avec la notation du produit scalaire :

$$\boxed{\langle\psi(f),\psi(f)\rangle = 2\,\langle f,\psi(f)\rangle}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}||\psi(f)-2f||^2 &= \langle\psi(f)-2f,\psi(f)-2f\rangle = ||\psi(f)||^2 - 4\,\langle\psi(f),f\rangle + 4||f||^2\\ &= ||\psi(f)||^2 - 4||f||^2 \text{ d'après le calcul précédent}\\ &= 0 \text{ par l'hypothèse de la question}\end{aligned}$$

La norme est nulle, donc la fonction est nulle: $\psi(f)-2f=0$,
Si on suppose que f est non nulle 2 est valeur propre de ψ, absurde le spectre de ψ est $]0,1]$.(cf **II.4.3**)

$$\boxed{\|\psi(f)\| = 2\,\|f\| \Longrightarrow f = \widetilde{0}}$$

5.

1. $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $a>0$ et $||f_a||^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2ax}dx = \frac{1}{2a}$.
2.

$$\psi(f)(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-at}dt = \dfrac{1-e^{-ax}}{ax} \text{ pour } x\neq 0\end{cases}$$

On a donc en utilisant **I.1.4** pour le calcul de l'intégrale :

$$\langle f_a,\psi(f_a)\rangle = \int_0^{+\infty} f_a(x)\psi(f_a)(x)dx = \frac{1}{a}\qquad\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx = \frac{1}{a}I(a,2a) = \frac{\ln(2)}{a}$$

et d'après III.3. 2

$$\|\psi(f_a)\|^2 = 2\,\langle f_a,\psi(f_a)\rangle = \frac{2\ln(2)}{a}$$

et donc $\boxed{\|\psi(f_a)\| = \sqrt{\dfrac{2\ln(2)}{a}}}$.

6.

1.

$$\psi(f)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x\neq 0\end{cases}$$

2.
   - f^2 est continue sur $[0,+\infty[$
   - $t^2f^2(t)$ admet une limite finie en $+\infty$.
   - donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et donc $f\in E_2$.

$$\langle f|\psi(f)\rangle = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt = \int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt$$

dans la seconde intégrale on pose $u=\dfrac{1}{t}$ changement de variable C^1 bijectif :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt = \int_0^1\frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du$$

or

$$\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t} = \left(\frac{1}{t(t+1)}+\frac{1}{t+1}\right)\ln(t+1) - \frac{1}{t+1}\ln(t) = \frac{\ln(t+1)}{t} - \frac{\ln(t)}{t+1}$$

et donc

$$\boxed{\langle f|\psi(f)\rangle = \int_0^1\left\{\frac{\ln(t+1)}{t} - \frac{\ln(t)}{t+1}\right\}dt}$$

3. une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t}+\dfrac{\ln t}{1+t}$est $\ln t\ln(1+t)$ .D'où :

$$\int_0^1\left(\frac{\ln(1+t)}{t}+\frac{\ln t}{1+t}\right)dt=\lim_{t->1}\left(\ln t\ln(1+t)\right)-\lim_{t->1}\left(\ln t\ln(1+t)\right)$$

or $\ln\left(1+t\right)\sim_0 t$ donc $\lim\limits_{t->1}\left(\ln t\ln(1+t)\right)=0$ et de même $\lim\limits_{t->1}\left(\ln t\ln(1+t)\right)=0$ et donc :

$$\int_0^1\left(\frac{\ln(1+t)}{t}+\frac{\ln t}{1+t}\right)dt$$

On a donc d'après **I.2.3**:

$$\langle f|\psi(f)\rangle=\int_0^1\left\{\frac{\ln(t+1)}{t}-\frac{\ln(t)}{t+1}\right\}dt=2\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}dt=\frac{\pi^2}{6}$$

et donc

$$\|\psi(f)\|^2=2\left\langle f,\psi(f)\right\rangle=\frac{\pi^2}{3}$$

$$\boxed{\|\psi(f)\|=\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$$