CCP 2006 -PSI
seconde épreuve : corrigé
Partie I.

La calculatrice est autorisée, il ne faut pas hésiter à l'utiliser (cf rapport du jury) . Il n'y a pas de paramètre et les valeurs obtenues sont entières (sauf pour les valeurs propres) donc les résultats sont fiables .
Il n'est pas inutile de faire le lien avec le II ($n = 5$, $\delta = 2$) . La matrice proposée vérifie évidemment $(\mathcal{P})$, donc $M^2 = J_n - M + dI_5$ (**II.1.3**) 2 est valeur propre (**II.2.3**) et un vecteur propre est v (**II.2.2**) .

1.

    1. On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

    2. On a donc

$$M^2 + M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I_5 + J_5$$

    donc ici $d = 1$. Et sachant que $M^2 + M - J_5$ doit être un multiple de I_5 une grosse protection contre les erreurs de calculs.

    3. On a sans problème

$$J_5^2 = 5J_5$$

    4. On en déduit que $(M^2 + M - I_5)^2 = 5(M^2 + M - I_5)$ c'est à dire que

$$P(M) = 0 \text{ en posant } \boxed{P = \left(X^2 + X - 1\right)\left(X^2 + X - 6\right)}$$

    5. Toute valeur propre de M est racine de P :

$$sp(M) \subset \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, 2, -3 \right\}$$

    6. C'est là que la machine et le plus utile. Si on calcule à la main :

    - On cherche $\ker(M - 2I_5)$ en résolvant:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} -2x & +y & & +t & & = & 0 \\ x & -2y & +z & & & = & 0 \\ & y & -2z & & +u & = & 0 \\ x & & & -2t & +u & = & 0 \\ & & z & +t & -2u & = & 0 \end{array} \right.$$

    On prend le x de la seconde ligne comme pivot:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x & -2y & +z & & & = & 0 \\ & -3y & +2z & +t & & = & 0 \\ & y & -2z & & +u & = & 0 \\ & 2y & -z & -2t & +u & = & 0 \\ & & z & +t & -2u & = & 0 \end{array} \right.$$

    On prend le y de la troisième ligne comme pivot:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrcl} x & -2y & +z & & & = & 0 \\ & y & -2z & & +u & = & 0 \\ & & -4z & +t & +3u & = & 0 \\ & & 3z & -2t & -u & = & 0 \\ & & z & +t & -2u & = & 0 \end{array} \right.$$

    On prend le z de la cinquième ligne comme pivot; on a $z = u$ puis en remontant $x = y = z = t = u$.
    remarque : il est au moins facile de prouver que 2 est valeur propre (le système n'est pas de Cramer en faisant la somme des lignes) et assez facile de trouver un vecteur propre évident : v .

- On cherche $\ker(M+3I_5)$ en résolvant:

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} 3x & +y & & +t & & = & 0 \\ x & +3y & z & & & = & 0 \\ & +y & +3z & & +u & = & 0 \\ x & & & +3t & +u & = & 0 \\ & & z & +t & +3u & = & 0 \end{array}\right.$$

On prend le x de la seconde ligne comme pivot:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -3y & +z & & & = & 0 \\ & -8y & -3z & +t & & = & 0 \\ & y & +3z & & +u & = & 0 \\ & 3y & -z & +3t & +u & = & 0 \\ & & z & +t & +3u & = & 0 \end{array}\right.$$

On prend le y de la troisième ligne comme pivot:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & -3y & +z & & & = & 0 \\ & y & -3z & & +u & = & 0 \\ & & 21z & +t & +8u & = & 0 \\ & & -8z & +3t & -2u & = & 0 \\ & & z & +t & +3u & = & 0 \end{array}\right.$$

On prend le z de la cinquième ligne comme pivot; on a $t=u=0$ puis en remontant $x=y=z=t=0$. $\underline{-3 \text{ n'est pas valeur propre}}$.

- On a donc

$$\boxed{sp(M)\cap\mathbb{Z}=\{2\} \text{ et } \ker(M-2I_5)=Vect((1,1,1,1,1))}$$

Partie II.

1. On a, M étant symétrique,

$$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{k,j}=\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}m_{j,k}$$

   1. On a $a_{i,i}=\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}^2=\delta$ (on a δ coefficients égaux à 1 et le reste nul sur une ligne)
   2. On suppose $i\neq j$.
      - Si $m_{i,j}=1$ alors d'après la remarque du sujet, tous les termes de la somme sont nuls et $a_{i,j}=0$.
      - Si $m_{i,j}=0$ il y a un unique terme dans la somme qui vaut 1 et les tous autres sont nuls. On a donc $a_{i,j}=1$.

      On peut donc écrire que

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall i\neq j\ ,\ a_{i,j}=1-m_{i,j}\\ \forall i\ ,\ a_{i,i}=\delta\end{array}}$$

   3. les coefficients non diagonaux de M^2+M sont donc tous égaux à 1 , les coefficients diagonaux valant δ

$$\boxed{M^2+M=J_n+(\delta-1)I_n}$$

2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. ainsi la base $\{e_i\}_{i=1}^n$ est orthonormale
   1. $\mathrm{Im}(\phi)$ est l'espace vectoriel engendré par les colonnes de J_n et donc

$$Im(\phi)=Vect(v)$$

   2. D'après la question 1 : $f^2+f=\phi+(\delta-1)Id$ et donc :

$$(f\circ f)(u)=\phi(u)+(\delta-1)u-f(u)$$

      Comme $f(u)=\delta u$ et comme il existe k réel telle que $\phi(u)=kv$ (car $\phi\in\mathrm{Im}(\phi)$) , on a $\delta^2 u=kv-u$ et comme $\delta^2+1\neq 0$ on a $u=\dfrac{k}{\delta^2+1}v$

$$\boxed{u \text{ est colinéaire à } v}$$

3. On vient de voir que $\ker(f - \delta id) \subset Vect(v)$. Réciproquement les coordonnées de $f(v)$ sont la somme par ligne des coefficients de M et donc $f(v) = \delta v$. Ainsi

$$\boxed{\ker(f - \delta id) = Vect(v)}$$

ce qui montre (comme $v \neq \overrightarrow{0}$) que δ est valeur propre de f et que le sous espace propre est Vect(v).

4. En appliquant la relation de **II.2.2** avec $u = v$, on obtient $\delta^2 v = nv - v$. Comme $v \neq 0$, on a donc

$$\boxed{\delta^2 + 1 = n}$$

3.

1. M est la matrice de f dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Comme M est symétrique réelle M (donc f) est diagonalisable dans une base orthonormale.

$$\boxed{\text{Il existe donc une base de } \mathbb{R}^n \text{ formée de vecteurs propres pour } f \text{ (et cette base est orthonormale)}}$$

2. Les sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux, et donc comme $\lambda \neq \delta$ $\ker(f - \lambda id)$ est orthogonal à $Ker(f - \delta id)$. u est donc orthogonal à v ce qui donne dans la base orthonormale de calcul.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

et donc $\phi(u) = 0$

3. Comme au début la question **II.2.2** on a $(\lambda^2 + \lambda)u = (\delta - 1)u$. Comme u est non nul (c'est un vecteur propre) on a :

$$\boxed{\lambda^2 + \lambda + 1 - \delta = 0}$$

4. La matrice est diagonalisable donc δ n'est pas la seule valeur propre réelle de M (le sous espace $E_\delta(M)$ est de dimension $1 < n$)
Donc l'une au moins des racines de $\lambda^2 + \lambda + 1 - \delta = 0$ est valeur propre
On montre par l'absurde que les 2 sont valeurs propres. Supposons qu'il existe une unique valeur propre $a \neq \delta$.
La matrice étant diagonalisable a est de multiplicité $n - 1$
De plus sa trace de M est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité et donc

$$(n-1)a + \delta = 0$$

Ce qui donne

$$a = -\frac{\delta}{n-1}$$

Or a est racine de $\lambda^2 + \lambda + 1 - \delta = 0$ et donc

$$\left(\frac{\delta}{n-1}\right)^2 - \frac{\delta}{n-1} + 1 - \delta = 0$$

. Ce qui se simplifie sachant $\delta^2 = n - 1$ (**II.2.4)**

$$\left(\frac{1}{n-1} + 1\right)(1 - \delta) = 0$$

donc on aurait $\delta = 1$. Absurde car dans cette partie $\delta \geq 2$

$$\boxed{\text{Les deux racines de } \lambda^2 + \lambda + 1 - \delta = 0 \text{ sont valeurs propres}}$$

4. 1. D'après la relation entre coefficients et racines d'un polynôme du second degré on a :

$$a + b = -1 \text{ et } ab = 1 - \delta$$

D'où :

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 1 - 4(1-\delta) = 4\delta - 3$$

2. On a
$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar+bs & r+s \\ a+b & 2 \end{pmatrix}$$
or :
   - La matrice est diagonalisable et les valeurs propres sont (δ, a, b) donc compte tenu des multiplicités :$ar+sb+\delta = Tr(f) = 0$ et donc $ar+sb = -\delta$.
   - De même la somme des dimensions des sous espaces propres est n : $r+s+1 = n$ et donc $r+s = n-1 = \delta^2$.
   - On sait déjà que $a+b = -1$
   $$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \delta^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
3. le déterminant du produit étant le produit des déterminant la relation précédente donne :
$$(r-s)(a-b) = \delta^2 - 2\delta$$
4. Comme $a \neq b$ (question $II.3$), $r = s$ si et seulement si $(r-s)(a-b) = 0$. Avec la question précédente, cette condition s'écrit :
$$\delta^2 - 2\delta = 0$$
d'où $\delta = 2, n = 5$, et comme $r+s = n-1 = 4$ on a : $r = s = 2$.
$$\boxed{\text{si } r = s : \delta = 2, n = 5, r = s = 2}$$

5. Si $a - b \notin \mathbb{Q}$

   1. Or reprend $(r-s)(a-b) = n-1-2\delta$; le membre de droite est un entier , le membre de gauche est donc aussi entier . et donc si $r \neq s$, $a-b$ est rationnel comme quotient d'entier.
   absurde : donc (fin de la question 4)
   $$\delta = 2, n = 5, r = s = 2$$
   2. a et b sont alors racines de $x^2 + x - 1 = 0$ et donc
   $$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$
   3. *remarque : faire le lien avec l'exemple de la première partie.*
   a et b sont de multiplicité 2 et $\delta = 2$ est de multiplicité 1. M est semblable à
   $$diag\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 2\right)$$

6.

   1. Si p est un nombre premier qui divise q alors p divise q^2 donc aussi $m^2 = (a-b)^2q^2 = (4\delta-3)\,q^2$. en utilisant le **II.4.1** et le fait que δ est entier. Or si p est un facteur premier de m^2, c'est aussi un facteur premier de m d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier:
   Si $m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ alors $m^2 = \prod_{i=1}^{n} p_i^{2\alpha_i}$ est l'unique décomposition de m^2 et il existe donc un i tel que $p = p_i$.
   Si on suppose que $\frac{m}{q}$ est la fraction irréductible égale à $a-b$ on en déduit que q n'admet pas de facteurs premiers; donc $q = 1$ et donc
   $$\boxed{a - b \in \mathbb{N}}$$
   2. $(a-b)^2 = 4\delta - 3$ est impair et $a-b$ est donc aussi impair . de plus $(a-b)^2 = 4\delta - 3 \geq 5$ (car $\delta \geq 2$) et donc $|a-b| > 1$, et comme a est la plus grande des deux racines $(a-b) > 1$. Or on a un entier impair donc $a-b \geq 3$
   On peut bien poser $a-b = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. on a alors $4\delta - 3 = (2p+1)^2$:
   $$\boxed{\delta = \frac{(2p+1)^2+3}{4}}$$
   de plus $a+b = -1$ (**II.4.1)** et donc
   $$\boxed{a = p \text{ et } b = -p-1}$$

3. On pose $c = a - b = 2p + 1$. De $(r - s)(a - b) = n - 1 - 2\delta$, on déduit que c divise $n - 1 - 2\delta$. Or $n = \delta^2 + 1$ (**II.2.4)** et donc c divise :

$$\delta^2 - 2\delta = \delta\,(\delta - 2) = \frac{(2p+1)^2 + 3}{4} . \frac{(2p+1)^2 - 5}{4} = \frac{1}{16}(c^2 + 3)(c^2 - 5)$$

Donc c divise $16\left(\delta^2 - 2\delta\right) = (c^2 + 3)(c^2 - 5) = c^4 - 2c^2 - 15$. Comme c divise $c^4 - 2c^2$, il divise donc 15. Les entiers impairs ≥ 3 qui divisent 15 sont $3, 5$ et 15.

$$\boxed{c \in \{3, 5, 15\}}$$

4. On connaît tout en fonction de p (en particulier $\delta = p^2 + p + 1$, $n = \delta^2 + 1$, $r + s = n - 1$ et $r - s = (n - 1 - 2\delta)/c$). On obtient le tableau suivant

c	δ	n	a	b	r	s
3	3	10	1	-2	5	4
5	7	50	2	-3	28	21
15	57	3250	7	-8	1729	1520

Une synthèse des questions 5 et 6 montre qu'il existe au plus 4 valeurs de n , pour la quelle une matrice vérifiant $(\mathcal{P})$ existe . On a déjà vu au **I** que $n = 5$ est possible; on construit au **III** un exemple pour $n = 10$.

Partie III.

1. On peut choisir 5 valeurs pour α , puis 4 pour β ce qui donne 20 couples (α, β)

   Mais $e_\alpha + e_\beta = e_\gamma + e_\delta \iff (\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$ ou $(\alpha, \beta) = (\delta, \gamma)$, car on a une base $(e_i)_{i=1}^5$. Les 20 couples donnent donc 10 vecteurs différents.

2. ψ transforme une base orthonormale en base orthonormale. C'est donc un automorphisme orthogonal , il conserve donc le produit scalaire.:

$$\forall i, j \in [|1, 10|],\ (u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$$

3. 1. Il existe $\alpha \neq \beta$ tels que $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et alors

$$(u_i|u_i) = (e_\alpha|e_\alpha) + 2(e_\alpha|e_\beta) + (e_\beta|e_\beta) = 2$$

   2. Avec les notations de l'énoncé on a :

$$(u_i|u_j) = (e_\alpha|e_\alpha) + (e_\alpha|e_\gamma) + (e_\beta|e_\alpha) + (e_\beta|e_\gamma) = 1$$

   3. et maintenant $(u_i|u_j) = 0$ (quatre produits scalaires nuls).

   1. analyse : On pose $M = xA + yJ_{10} + zI_{10}$ et on cherche des conditions pour que M vérifie $(\mathcal{P})$

      - Par symétrie du produit scalaire, la matrice A est symétrique. donc pour tous scalaires x y et z : M est symétrique.
      - les termes diagonaux sont nuls donc :

$$2x + y + z = 0$$

      - Si $u_i = e_\alpha + e_\beta$ il y a 3 vecteurs $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\beta \neq \gamma$ et 3 vecteurs $u_j = e_\gamma + e_\beta$ avec $\gamma \neq \alpha$; sur chaque ligne de A il y a donc six termes égaux à 1.
        toujours si $u_i = e_\alpha + e_\beta$ il y a 3 vecteurs $u_j = e_\gamma + e_\varepsilon$ avec 4 indices distincts (α et β étant fixé il reste 3 valeurs possibles pour γ et ε) sur chaque ligne de A il y a donc trois termes égaux à 0.
        On a bien sur chaque ligne 1+6+3=10 termes : un égal à 2 , 6 égaux à 1 et 3 égaux à 6.
        Comme on veut $\delta = 3$, les 1 de A correspondent au 0 de M et les 0 de A au 1 de M et donc :

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

      - et donc la combinaison linéaire possible est :

$$M = J_n - A + I_n$$

   2. synthèse:

      La matrice proposée :

      - est symétrique

- a des coefficients nuls sur la diagonale
- a trois coefficients égaux à 1 sur chaque lignes , les autres étant nuls.
- pour $i \neq j$, $m_{i,j} = 0 \Longleftrightarrow a_{i,j} = 1$ et donc $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$ avec $\gamma \neq \beta$ (ou exclusif $u_j = e_\gamma + e_\beta$ avec $\gamma \neq \alpha$) . Soit alors λ et μ les deux derniers indices (i.e. $\{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$) . et $u_k = e_\lambda + e_\mu$. On a $a_{i,k} = (u_i | u_k) = 0$ (car les 4 indices sont distincts) et $a_{j,k} = 0$. On a donc bien un k tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$. de plus c'est le seul car pour tout autre vecteur $u_l = e_\theta + e_\tau$ l'un des indices θ ou τ est dans l'ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ donc ($a_{i,l} = 1$ ou $a_{j,l} = 1$) et donc ($m_{i,l} = 0$ ou $m_{j,l} = 0$)

$$\boxed{M = J_n - A + I_n \text{ vérifie } (\mathcal{P})}$$