

### Les calculatrices sont autorisées.

\*\*\*\*\*

*N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.  
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*\*

*Le sujet comporte 6 pages.*

#### **Notations :**

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels, par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres entiers naturels et par  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels. On note  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble  $\mathbb{N}$  privé de 0.

Etant donné un entier naturel non nul  $n$ , on note  $\llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $1 \leq k \leq n$ .

Pour  $n$  entier naturel non nul, on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) l'espace vectoriel des matrices carrées à  $n$  lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes) à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

Etant donné une matrice  $A$ , la notation  $A = (a_{i,j})$  signifie que  $a_{i,j}$  est le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $A$ .

On note  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  c'est-à-dire, telle que  $I_n = (a_{i,j})$  avec :

Pour tout  $i$ ,  $a_{i,i} = 1$  et pour tout  $i \neq j$ ,  $a_{i,j} = 0$ .

On note  $J_n$  la matrice carrée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 et  $K_n$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est rapporté à la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

## Objectifs :

Le problème porte sur l'étude de matrices vérifiant une propriété ( $\mathcal{P}$ ).

Dans la partie I, on fait établir des résultats sur une matrice particulière vérifiant la propriété ( $\mathcal{P}$ ).

La partie II conduit, à travers l'étude des matrices vérifiant la propriété ( $\mathcal{P}$ ), à caractériser ces matrices à l'aide de matrices semblables.

Dans la partie III, on construit, à l'aide de produits scalaires, une matrice vérifiant la propriété ( $\mathcal{P}$ ).

Les trois parties sont indépendantes les unes des autres.

## PARTIE I

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R}).$$

**I.1.** Calculer la matrice  $M^2$ .

**I.2.** Exprimer la matrice  $M^2 + M$  en fonction des matrices  $J_5$  et  $I_5$ .

**I.3.** Exprimer la matrice  $J_5^2$  en fonction de la matrice  $J_5$ .

**I.4.** Dédire des questions précédentes un polynôme annulateur de  $M$ .

**I.5.** Quelles sont les valeurs propres possibles de la matrice  $M$  ?

**I.6.** Montrer que  $M$  possède une valeur propre entière (et une seule) ; déterminer cette valeur propre entière ainsi que le sous-espace propre associé.

## PARTIE II

Dans cette partie  $n$  et  $\delta$  sont des nombres entiers tels que  $2 \leq \delta \leq n-1$ .

On dit qu'une matrice  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$  lorsqu'elle vérifie les quatre conditions suivantes :

- (1)  $M$  est symétrique
- (2) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $m_{i,i} = 0$
- (3) Chaque ligne de  $M$  comporte  $\delta$  coefficients égaux à 1 et  $n - \delta$  coefficients égaux à 0.
- (4) Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , le coefficient  $m_{i,j} = 0$ , si et seulement si, il existe un entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $m_{i,k} = m_{j,k} = 1$ .  
L'entier  $k$  est alors unique.

On pourra utiliser sans justification une conséquence de la propriété  $(\mathcal{P})$  :  
si  $m_{i,j} = 1$ , alors pour tout entier  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a le produit  $m_{i,k}m_{j,k} = 0$ .

Soit  $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que la matrice  $M$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ .

**II.1.** Expression de  $M^2$ . On note  $M^2 = (a_{i,j})$ .

**II.1.1.** Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , calculer les coefficients  $a_{i,i}$ .

**II.1.2.** Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ , déterminer le coefficient  $a_{i,j}$  selon la valeur de  $m_{i,j}$ .

**II.1.3.** Montrer que  $M^2 = J_n - M + dI_n$  où  $d$  est un nombre entier que l'on déterminera.

Dans la suite, on note  $f$  (respectivement  $\varphi$ ) l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$ , de matrice  $M$  (respectivement de matrice  $J_n$ ), relativement à la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $id$  l'endomorphisme identité de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $v$  le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont la matrice colonne des coordonnées relativement à la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est  $K_n$ .

**II.2.** Relation entre  $n$  et  $\delta$ .

**II.2.1.** Déterminer  $\text{Im}(\varphi)$ , l'image de l'application linéaire  $\varphi$ .

**II.2.2.** Soit  $u$  un vecteur du noyau de  $f - \delta \text{id}$ .

En calculant  $(f \circ f)(u)$ , montrer que  $u$  est colinéaire à  $v$ .

**II.2.3.** Montrer que  $\delta$  est une valeur propre de  $f$  et déterminer le sous-espace propre correspondant.

**II.2.4.** Dédurre des questions précédentes l'égalité  $n = \delta^2 + 1$ .

**II.3.** Valeurs propres de  $f$ .

Dans la suite de cette question **II.3**,  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  avec  $\lambda \neq \delta$  et

$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**II.3.1.** Justifier l'affirmation : il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

**II.3.2.** Justifier l'égalité  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . Que vaut  $\varphi(u)$  ?

**II.3.3.** Montrer que  $\lambda$  est racine de l'équation  $(E)$ :  $x^2 + x + 1 - \delta = 0$ .

**II.3.4.** On note  $a$  et  $b$  les deux racines de l'équation  $(E)$ . On suppose qu'une seule de ces racines est valeur propre de  $f$ , par exemple  $a$ . En utilisant la trace de l'endomorphisme  $f$ , exprimer  $a$  en fonction de  $\delta$ . En déduire une impossibilité.

Les deux racines  $a$  et  $b$  de l'équation  $(E)$  sont donc des valeurs propres de  $f$ . Dans la suite, on suppose  $a > b$ .

**II.4.** Relations portant sur  $r$ ,  $s$ ,  $a$ ,  $b$  et  $\delta$ .

On note  $r$  la dimension du noyau de  $f - a \text{ id}$  et  $s$  la dimension du noyau de  $f - b \text{ id}$ .

**II.4.1.** Exprimer  $(a-b)^2$  en fonction de  $\delta$ .

**II.4.2.** Exprimer le produit matriciel  $\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$  en fonction de  $\delta$ .

**II.4.3.** En déduire  $(r-s)(a-b)$  en fonction de  $\delta$ .

**II.4.4.** Pour quelle valeur de  $\delta$  a-t-on  $r = s$ ? Que valent alors  $r$  et  $s$ ?

Dans la suite, on caractérise la matrice  $M$  par une matrice diagonale semblable à  $M$ .

**II.5.** Premier cas. On suppose que  $a-b \notin \mathbb{Q}$ .

**II.5.1.** Montrer que  $r = s$ . En déduire  $\delta$  et  $n$ .

**II.5.2.** Déterminer  $a$  et  $b$  et donner une matrice diagonale semblable à  $M$ .

**II.6.** Deuxième cas. On suppose que  $a-b \in \mathbb{Q}$ .

**II.6.1.** On écrit  $a-b = \frac{m}{q}$  avec  $m$  et  $q$  dans  $\mathbb{N}^*$ . Montrer que tout nombre premier qui divise  $q$  divise  $m$ . En déduire que  $a-b \in \mathbb{N}$ .

**II.6.2.** Montrer que  $a-b$  est un entier impair supérieur ou égal à 3. En notant  $a-b = 2p+1$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , exprimer  $\delta$  en fonction de  $p$ . En déduire  $a$  et  $b$  en fonction de  $p$ .

**II.6.3.** On note  $c = a-b$ . Montrer que  $c$  divise  $(c^2+3)(c^2-5)$ . En déduire que  $c \in \{3, 5, 15\}$ .

**II.6.4.** Pour les différentes valeurs de  $c$ , donner le tableau des valeurs de  $\delta, n, a, b, r$  et  $s$ .

### PARTIE III

On considère l'espace vectoriel euclidien  $\mathbb{R}^5$  rapporté à la base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ .

On note  $(u|w)$  le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $w$  de  $\mathbb{R}^5$ .

On considère tous les vecteurs  $u_i$  obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de  $\mathcal{B}$  :

$$u_i = e_\alpha + e_\beta \text{ avec } \alpha \neq \beta.$$

**III.1.** Justifier que l'on définit ainsi 10 vecteurs  $u_i$ .

On indexe les vecteurs  $u_i$  de façon arbitraire :  $u_i, i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ .

**III.2.** Soit  $\psi$  un endomorphisme de  $\mathbb{R}^5$  qui réalise une bijection de la base  $\mathcal{B}$  sur elle-même.

Montrer que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket \times \llbracket 1, 10 \rrbracket$ , on a  $(u_i|u_j) = (\psi(u_i)|\psi(u_j))$ .

**III.3.** Calcul des produits scalaires  $(u_i|u_j)$ .

**III.3.1.** Pour  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ , calculer  $(u_i|u_i)$ .

**III.3.2.** On suppose que  $u_i = e_\alpha + e_\beta$  et que  $u_j = e_\alpha + e_\gamma$  avec  $\beta \neq \gamma$ . Calculer  $(u_i|u_j)$ .

**III.3.3.** On suppose que  $u_i = e_\alpha + e_\beta$  et que  $u_j = e_\gamma + e_\varepsilon$  avec les quatre indices  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  tous différents. Calculer  $(u_i|u_j)$ .

**III.4.** Soit  $A = (a_{i,j})$  avec  $a_{i,j} = (u_i|u_j)$ .

**III.4.1.** Écrire une combinaison linéaire  $M$  de  $A, I_{10}$  et  $J_{10}$  susceptible de vérifier la propriété  $(\mathcal{P})$  définie dans la partie II.

**III.4.2.** Justifier que cette matrice  $M$  vérifie la propriété  $(\mathcal{P})$ .

**Fin de l'énoncé.**