

CCP 2001. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

I. Projection sur un convexe fermé de \mathbb{R}^n .

En se plaçant dans le plan on peut faire des figures pour voir ce qui se passe.

1. Inégalité de Schwarz et cas d'égalité : question de cours classique.

Soit (a, b, c) vérifiant les conditions de l'énoncé. (figure 1 dans le plan). On note $i = \frac{a+b}{2}$: la médiane du triangle est aussi hauteur :

$$\langle b - c, a - i \rangle = \left\langle b - c, \frac{2a - b - c}{2} \right\rangle = \left\langle (b - a) + (a - c), \frac{(a - b) + (a - c)}{2} \right\rangle = \frac{\|a - c\|^2 - \|a - b\|^2}{2}$$

On peut alors appliquer Pythagore :

$$\|a - b\|^2 = \|(a - i) + (i - b)\|^2 = \left\| (a - i) + \left(\frac{c - b}{2}\right) \right\|^2 = \|a - i\|^2 + \frac{\|c - b\|^2}{4}$$

$$\boxed{\|a - b\|^2 > \|a - i\|^2}$$

On peut aussi utiliser la formule générale qui donne la longueur de la médiane en fonction des côtés (TD 21 exo 9)

2. Dans le cas où F est borné, F est un compact non vide. Or la fonction $k \rightarrow \|x - k\|$ est continue sur le compact F à valeur dans \mathbb{R} . L'image est donc un compact de \mathbb{R} qui contient son plus petit élément :

$$\exists u \in F, \forall k \in F, \|x - u\| \leq \|x - k\|$$

Dans le cas général (figure 2) l'ensemble des distance $\{\|x - y\|, y \in F\}$ est un sous ensemble non vide minoré par 0 de \mathbb{R} . Il admet donc une borne inférieure d . On applique l'étude précédente au compact : $F \cap B'(x, d + 1)$ qui est non vide car par définition de la borne inférieure $\exists y \in F, d \leq \|x - y\| < d + 1$.

$$\exists u \in F \cap B'(x, d + 1), \forall k \in F \cap B'(x, d + 1), \|x - u\| \leq \|x - k\|$$

Si $\|x - u\| > d$, $\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - u\|$ donc $\inf \{\|x - y\|, y \in F\} \geq \|x - u\|$ absurde car c'est d .

$$\boxed{\exists u \in F, \forall k \in F, \|x - u\| \leq \|x - k\|}$$

La distance d'un point à un fermé est atteinte.

3. Soit désormais A un convexe fermé et deux points u_1 et u_2 de A en lesquels la distance de x à A est atteinte. Si $u_1 \neq u_2$, on a d'après 1., $\|x - m\| < \|x - u_1\| = (x, A)$ avec $m = \frac{u_1 + u_2}{2}$ le milieu. Or si A est convexe le milieu de $[u_1, u_2]$ est dans A . Il existe un point m de A strictement plus près de x que le point rendant la distance minimum ce qui est impossible.

La distance à un convexe fermé est atteinte en un unique point.

4. Soit α vérifiant les conditions de l'énoncé et soit y quelconque de A . Le sujet veut dire que l'angle $\widehat{x\alpha y}$ est toujours droit ou obtus. (figure 3)

$$\|x - y\|^2 = \|x - \alpha\|^2 + \|y - \alpha\|^2 - 2\langle x - \alpha, y - \alpha \rangle \geq \|x - \alpha\|^2 \text{ donc } \alpha \text{ réalise le minimum et } \alpha = P(x).$$

5. Supposons qu'il existe $y \in A$ vérifiant les conditions de l'énoncé (ce qui assure $y \neq P(x)$) et soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = P(x) + t(y - P(x))$. On remarque que $y(t)$ décrit la droite passant par $P(x)$ et de vecteur directeur $(y - P(x))$. (figure 4)

On a $S(t) = \|x - y(t)\|^2$.

Par ailleurs $S(t) = \|x - P(x)\|^2 - 2\langle x - P(x), y - P(x) \rangle t + \|y - P(x)\|^2 t^2$ est un trinôme du second degré en t . donc atteint son minimum sur \mathbb{R} en $t_0 = \frac{\langle x - P(x), y - P(x) \rangle}{\|y - P(x)\|^2}$ strictement positif.

Donc $S(t_0) < S(0) = \|x - P(x)\|^2$.

Or $S(1) = \|x - y\|^2 > \|x - P(x)\|^2$ puisque $y \neq P(x)$ i.e. $S(1) > S(0)$.

Ainsi $t_0 \in]0, 1[$ donc $y(t_0) \in A$ (car A est convexe) et $\|x - y(t_0)\|^2 = S(t_0) < S(0) = \|x - P(x)\|^2$ ce qui est contradictoire avec la définition de $P(x)$ qui rend minimum la distance.

En conclusion il n'existe aucun élément y de A tel que $\langle x - P(x), y - P(x) \rangle > 0$.

6. Simple résumé des deux questions précédente : (figure 3 de nouveau)

La projection $P(x)$ de x sur un convexe fermé de \mathbb{R}^n est caractérisée par $\langle x - P(x), y - P(x) \rangle \leq 0$ pour tout $y \in A$.

7 Puisque $P(y) \in A$, on a $\langle x - P(x), P(y) - P(x) \rangle \leq 0$ et de même comme $P(x) \in A$ $\langle y - P(y), P(x) - P(y) \rangle \leq 0$.

En ajoutant les inégalités : $\langle (x - P(x)) - (y - P(y)), P(y) - P(x) \rangle \leq 0$.

Soit $\langle x - y, P(x) - P(y) \rangle - \langle P(x) - P(y), P(y) - P(x) \rangle \leq 0$

$$\boxed{\langle x - y, P(x) - P(y) \rangle \geq \langle P(x) - P(y), P(x) - P(y) \rangle}$$

Si $P(x) \neq P(y)$ il en découle par l'inégalité de Schwarz que $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$. Ce qui est encore vrai si $P(x) = P(y)$.
Ainsi

P est lipschitzienne de rapport 1 donc continue

Naturellement $P(x) = x$ si $x \in A$ donc $P(A) = A$ et a fortiori $P(\mathbb{R}^n) = A$

II. Théorème de Brouwer dans \mathbb{R}^2 .

9. Avec le sujet on suppose que x et $f(x)$ ont deux points distincts du disque B . Les vecteurs du type $x + t(x - f(x))$ sont ceux de la droite affine passant par x et de vecteur directeur $x - f(x)$. Ce sont donc ceux de la droite passant par x et $f(x)$. On doit donc prouver qu'une droite passant par deux points d'un disque coupe le cercle qui en est le bord. L'existence est géométriquement évidente. Reste à faire le calcul de ρ .

F_x définie sur \mathbb{R} par $F_x(t) = \|x + t(x - f(x))\|^2 - 1$. On cherche donc t pour rendre nulle cette quantité.

$F_x(t) = \|x - f(x)\|^2 t^2 + 2\langle x, x - f(x) \rangle t - (1 - \|x\|^2)$. $F_x(t)$ est un trinôme du second degré ($f(x) \neq x$). Si on cherche les racines on trouve

$$\Delta(x) = \langle x, x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 (1 - \|x\|^2)$$

Il existe au moins une racine réelle.

- si $\|x\| = 1$ l'une des racines est nulle et l'autre négative car $\langle x, x - f(x) \rangle = 1 - \langle x, f(x) \rangle \geq 1$ par Cauchy Schwarz
- si $\|x\| < 1$ le produit des racines est strictement négatif donc il existe une et une seule racine positive.
- Dans les deux cas ρ est la plus grande racine du trinôme :

$$\boxed{\rho(x) = \frac{-\langle x, x - f(x) \rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - f(x)\|^2} \text{ avec } \Delta(x) = \langle x, x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 (1 - \|x\|^2)}$$

ce qui prouve que ρ est de classe \mathcal{C}^2 par composition d'applications classiquement \mathcal{C}^2 si Δ et non nul. Or si $\Delta = 0$ la droite coupe le cercle en un seul point. Elle est donc tangente au cercle. Ce qui est absurde car la droite contient deux points distincts du disque.

10. $\varphi(x)$ est l'élément construit à la question précédente. Il est donc de norme 1. On a $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$ donc par dérivation

(licite puisque φ est \mathcal{C}^2) $\begin{cases} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 0 \\ \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$ c'est à dire

${}^t M(x) \cdot \varphi(x) = 0$ pour tout $x \in B$ en notant $M(x)$ la matrice proposée.

Donc $\varphi(x) \in \text{Ker}(M(x))$. Or $\varphi(x) \neq 0$ puisque $\|\varphi(x)\| = 1$. Donc $M(x)$ n'est pas inversible.

11.

11a) $A(x)$ est la matrice jacobienne de α . Il vient $\psi(x, t) = 1 + t \cdot \text{tr}(A(x)) + t^2 \det(A(x))$ donc $\beta(x) = \text{tr}(A(x))$ et $\gamma(x) = \det(A(x))$ qui sont de classe \mathcal{C}^1 puisque α est de classe \mathcal{C}^2 .

En outre $\varphi(x) = x + \alpha(x)$ donc $M(x) = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_{1,1}(x) & \alpha_{2,1}(x) \\ \alpha_{1,2}(x) & 1 + \alpha_{2,2}(x) \end{pmatrix} = \psi(x, 1)$ et, d'après **10.**, $\boxed{\psi(x, 1) = 0}$.

11b) Pour t fixé, $x \mapsto \psi(x, t)$ est continue sur B d'après **a.** donc J est bien définie.

$$J(0) = \iint_B dx_1 dx_2 = \pi \text{ (aire d'un disque)}$$

$$J(1) = 0 \text{ d'après a.}$$

11c. $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = \iint_B \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$. Par Fubini (licite car les fonctions sont continue sur B) :

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 &= \int_{x_2=-1}^{x_2=1} \left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{x_2=-1}^{x_2=1} \left(\alpha_1(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) - \alpha_1(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \right) dx_2. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x_2 \in [-1, 1]$, $y = (-\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$ et $z = (\sqrt{1-x_2^2}, x_2)$ appartiennent à S donc $\rho(y) = \rho(z) = 0$ donc $\alpha(y) = \alpha(z) = 0$ donc a fortiori $\alpha_1(y) = \alpha_1(z) = 0$.

Ainsi $\iint_B \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = 0$ et de même $\iint_B \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = 0$. Donc finalement $\boxed{\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0}$.

11d. Par Fubini comme ci-dessus, $I_1(g) = \int_{x_2=-1}^{x_2=1} \left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \frac{\partial g_2}{\partial x_2} dx_1 \right) dx_2$.

L'intégrale interne se calcule par parties (licite car g est de classe \mathcal{C}^2) et vaut ainsi :

$$g_1(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-x_2^2}, x_2) - g_1(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-x_2^2}, x_2) - \int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}} g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1.$$

En réutilisant Fubini en sens inverse pour la fonction $x \mapsto g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x)$ (qui est bien continue sur B puisque g est \mathcal{C}^2), on obtient la valeur cherchée pour $I_1(g)$.

D'après le calcul de γ : $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = I_1(\alpha) - I_2(\alpha)$ et la transformation précédente s'applique car α est bien de classe \mathcal{C}^2 (Cf **9.**),.

- Les intégrales doubles se simplifient $\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2 \partial x_1}$ d'après le théorème de Schwarz car α est C^2
- Tous les points du type $(\sqrt{1-s^2}, s)$ sont sur le cercle S . En un tel point ρ et nul donc aussi α . Les deux intégrales simples sont nulles.

$$\boxed{\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0.}$$

Il découle immédiatement de ce qui précède

$$J(t) = \int \int_B 1 + t \int \int_B \beta + t^2 \int \int_B \gamma = \int \int_B = 1 = \pi$$

ce qui est contradictoire avec $J(1) = 0$.

La contradiction porte sur la seule hypothèse faite à savoir f n'admet pas de point fixe, hypothèse qui nous a permis de définir la fonction ρ .

Le théorème de Brouwer pour une application C^2 de B dans B est établi.

12,13,14: admis

Toute application continue de B dans B admet un point fixe.

15. Il suffit de remarquer que g est une application continue de B dans B .

16.

a) A étant compact et f continue, $f(A)$ est compact ainsi que $A \cup f(A)$ en tant qu'union de deux compacts. Donc $A \cup f(A)$ est borné et r existe.

b) h est une application de $\overline{B}(O, r)$ dans A donc a fortiori dans $\overline{B}(O, r)$. En outre elle est continue puisque f et P le sont (Cf 7.). D'après la question précédente, h admet un point fixe $\omega \in \overline{B}(O, r)$: $f(P(\omega)) = \omega$.

Comme ω est dans l'image de f ω est dans A .

Le théorème de Brouwer dans \mathbb{R}^2 est ainsi établi

remarque : En utilisant la question 8 le sujet initiale montre un résultat un peu plus général.

III. Quelques conséquence du théorème de Brouwer.

17. Supposons $g = -f$ continue. Alors g est une application continue de B dans S donc dans B et admet, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe ω qui appartient à S puisque g est à valeurs dans S . Ainsi $f(\omega) = -\omega$. Mais comme $f(x) = x$ sur S , $f(\omega) = \omega$. Donc $\omega = 0$ ce qui est impossible puisque $\omega \in S$.

Le théorème de non rétraction continue est établi

Il n'existe aucune application continue de B dans S qui fixe les points de S .

18. Comme $y \notin f(B)$, g est bien définie et est une application continue de B dans S (donc aussi dans B) et admet donc, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $\omega = g(\omega)$ qui appartient à S

Donc $g(\omega) = \frac{y-\omega}{\|y-\omega\|}$ car $f(\omega) = \omega$ puisque $\omega \in S$. Ainsi $\frac{y-\omega}{\|y-\omega\|} = \omega$ avec $\omega \in S$.

Donc $y = \omega(1 + \|y - \omega\|)$ donc $\|y\| > 1$ car $y \neq \omega$ (y n'est pas dans l'image et ω l'est)

Si f est continue sur B et fixe les points de S alors $B \subset f(B)$.

Suivent deux dernières questions non adaptées au programme de PC.