E4A 2002 Math 2 exercice 2

Remarque préliminaire : les fonctions u_n sont définies sur $\mathbb{R}$ et impaires. on ne restreint pas l'étude en supposant $x \geq 0$

1a)

- si $x = 0$ on a pour tout n , $u_n(x) = 0$ donc la série $\sum u_n(0)$ converge
- si $x \neq 0$ on a $u_n(x) \sim_{n->+\infty} \frac{1}{x}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$. Les séries sont à termes positifs . La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge car $\alpha + 1 > 1$. On a donc la convergence de $\sum u_n(x)$.

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+}$$

1b)

- On peut remarquer que $u_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$. Donc pour $a \leq 1/2$ on a une série de Riemann divergente.
  On a trouvé une suite (x_n) telle que $\sum u(x_n)$ diverge . la série $\sum u_n$ ne converge pas normalement
- On a la majoration : $\begin{cases} x \leq 1 \Rightarrow u_n(x) \leq \frac{1}{n^\alpha.1} = \frac{1}{n^\alpha} \\ x \geq 1 \Rightarrow u_n(x) \leq \frac{x}{n^\alpha.nx^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{n^\alpha} \end{cases}$ donc $\alpha > 1 \Rightarrow$CVN
- Mais je ne trouve pas de majoration simple marchant pour tout $\alpha > 1/2$.On peut calculer $\sup_{\mathbb{R}^+}(u_n)$:
  u_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée $u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha}\frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. L'étude des variations ne pose pas de problème $\sup_{\mathbb{R}^+}(u_n) = u_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$. La série $\sum \sup_{\mathbb{R}^+}(u_n)$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}^+ \text{ si et seulement si } \alpha > 1/2}$$

1c) Si $\alpha > 1/2$ le résultat est évident d'après la question précédente.
Sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ on a $|u_n(x)| \leq \frac{b}{n^\alpha(1+na^2)} \sim_{n->+\infty} \frac{b}{a^2}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$. la série $\sum \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ converge car $1 + \alpha > 1$. On peut donc dire que

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge normalement sur tout segment inclus dans } \mathbb{R}^+}$$

1d) On a $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$ puisque les termes manquants sont positifs.
de plus $k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{(2n)^\alpha}$ et $(2n \geq 1$ et $\alpha \leq 1/2) \Rightarrow (2n)^\alpha \leq (2n)^{1/2}$ donc $\frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \geq \frac{x}{(2n)^{1/2}(1+kx^2)}$. Et en ajoutant les inégalités :

$$R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{(2n)^{1/2}(1+kx^2)}$$

- Si on prend $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (cf 1b pour essayer cette valeur) $R_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{n\sqrt{2}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \geq \frac{1}{n\sqrt{2}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$
  On a trouvé une suite (x_n) de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $R_n(x_n)$ ne tend pas vers 0 .

$$\boxed{\sum u_n \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

2a) et 2b) Théorème : Soit $f = \sum f_n$ une série de fonctions continues qui converge simplement sur un intervalle I . Si la convergence est normale sur I (ou sur tout segment inclus dans I) alors a somme f est continue sur I.

- Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient , à dénominateur non nul de fonctions continues.
- Pour tout α on a convergence normale sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ (question **1c**) donc continuité de S sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Pour tout $\alpha > 1/2$ on a convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ (question **1b**) donc continuité de S sur $\mathbb{R}^+$

$$\boxed{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ , et continue sur } \mathbb{R}^+ \text{ pour } \alpha > 1/2}$$

2c)

- Le dénominateur de f est le produit de deux fonctions positives croissantes de f (quand t varie) donc est croissant. f est une fonction décroissante . Donc pour $t \in [k, k+1]$ $f(t) \leq f(k)$ donc $S_n(x) \geq \int_1^{n+1} f(t)dt$ et par passage à la limite

$$S(x) \geq \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

  Les limites existent :

- pour (S_n) par convergence de la série :
- pour $\left(\int_1^{n+1} f(t)dt\right)$ car on a une suite croissante (f positive) majorée par $S(x)$

- $\int_1^n \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}dt = \int_1^{n^2} \frac{2xdu}{1+u^2x^2} = 2\left[\arctan(ux)\right]_1^{n^2} = 2\arctan(n^2x) - 2\arctan(x)$. Donc en passant à la limite

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}\,(1+tx^2)}dt = \pi - 2\arctan(x)$$

- On a donc pour $\alpha \leq 1/2$:

$$S(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{t^\alpha\,(1+tx^2)}dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}\,(1+tx^2)}dt = \pi - 2\arctan(x)$$

- Or $S(0) = 0$ Donc en raisonnant par l'absurde :
si S est continue en 0 $\lim_{0^+}(S(x)) = 0$. L'inégalité précédente donne $0 \geq \pi$. ABSURDE

$$\boxed{\text{si } \alpha \leq 1/2 \text{ , } S \text{ n'est pas continue en } 0}$$

- Remarque : si $\alpha = 1/2$ $S(x) \leq u_1(x) + \int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{x}{1+x} + \pi - 2\arctan(x)$. Donc par encadrement $\lim_0(S(x)) = \pi$

- Remarque : si $\alpha < 1/2$ je pense que $\lim_{x->0}\left(\int_1^{+\infty} f\right) = +\infty$ et donc $\lim_0(S) = +\infty$ (Pour $\alpha = 1/3$ et $1/4$ c'est ce que donne MAPLE)