ECOLE DE L'AIR
Math 2
Concours 2002
Les figures sont en annexes

1a) On écrit $MM_0^2 = 4a^2$: $(x+2a)^2 + y^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4ax = 0$
Pour avoir l'équation polaire :

- on pose : $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ donc $r^2 + 4ar\cos(\theta) = 0$
- si $r \neq 0$ on a donc $r = -4a\cos(\theta)$
- si $r = 0$ le point est en O . Il est obtenu par la formule précédente pour $\theta = \pi/2$

$$\boxed{r = -4a\cos(\theta)}$$

On peut retrouver cette formule en écrivant que le triangle OMP est rectangle en M donc $OM = OP\cos(\theta)$
1b) La droite D a l'équation cartésienne $x = 2a$ donc en polaire $r\cos(\theta) = 2a$ donc $r = \frac{2a}{\cos(\theta)}$
Sur l'axe d'angle polaire θ on a donc pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$: $\overrightarrow{OH(\theta)} = \frac{2a}{\cos(\theta)}\overrightarrow{u(\theta)}$ et $\overrightarrow{OM(\theta)} = -4a\cos(\theta)\ \overrightarrow{u(\theta)}$. Le milieu donne donc

$$\overrightarrow{OI(\theta)} = \left(\frac{a}{\cos(\theta)} - 2a\cos(\theta)\right)\overrightarrow{u(\theta)} = a\left(\frac{1 - 2\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)}\right)\overrightarrow{u(\theta)} = -a\left(\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}\right)\overrightarrow{u(\theta)}$$

1c) Même si la condition n'est pas demandée n'oubliez pas $\theta \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)$

- $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$: les deux points sont confondus
- $r(\theta + \pi) = -r(\theta)$: les deux points sont confondus
- $r(-\theta) = r(\theta)$: les deux points sont symétriques par rapport à Ox
- Pour obtenir la totalité du support de la courbe on peut prendre $\theta \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- Un domaine d'étude est donc $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on déduit la courbe entière par symétrie par rapport à Ox

1d) On a $r(\theta)\sin(\theta - \pi/2) = -r(\theta)\cos(\theta) = a\cos(2\theta)$ de limite $-a$ si θ tend vers $\frac{\pi}{2}$. De plus $\lim_{\pi/2}(r(\theta)) = +\infty$
Dans le repère $(O, u(\pi/2), v(\pi/2))$ on a une asymptote d'équation $Y = -a$, donc d'équation $x = a$ dans le repère initial.
1e) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ on a les signes :

θ	0		$\pi/4$		$\pi/2$		$3\pi/4$		π	
$\cos(\theta)$	1	+	+	+	0	-	-	-	-1	
$\cos(2\theta)$	1	+	0	-	-1	-	0	+	1	
$r(\theta)$	-1	-	0	+	$\vert\vert$	-	0	+	1	

En $\pi/4$ la courbe passe par 0 point ou la tangente fait donc un angle polaire de $\pi/4$
D'où la figure .
1f) La boucle correspond à $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 d\theta = a^2 \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 d\theta$$

L'expression a intégrer est invariante par $\theta -> \theta + \pi$. On a en plus $d(\tan(\theta)) = \frac{1}{(\cos(\theta))^2}$. Deux bonnes raisons de poser $\tan(\theta) = u$

$$\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 d\theta = \int_0^1\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 du = \int_0^1 (1)\,du - 4\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} + 4\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$$

en décomposant en éléments simples .
Or $\int_0^1 (1)\,du$, $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} = [\arctan(u)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ et en intégrant par partie :

$$\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)} - 2\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2}$$

et donc $\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

$$\mathcal{A} = a^2(2 - \pi/2)$$

1g) On a l'équation polaire : $r = a\left(\frac{1}{\cos(\theta)} - 2\cos(\theta)\right)$ soit en multipliant par $\cos(\theta)$:

$$x = a\left(1 - 2\cos(\theta)^2\right) = a\left(1 - 2\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) \text{ pour } r \neq 0$$

Soit

$$x\left(x^2+y^2\right) = a(y^2 - x^2)$$

pour $r = 0$ le point est à l'origine . $(0,0)$ est bien solution de l'équation précédente.
Réciproquement tout point de la courbe $x\left(x^2+y^2\right) = a(y^2-x^2)$ est un point $I(\theta)$. Le calcul se remonte bien sauf pour $r = 0$ ou $\cos(\theta) = 0$; donc $x = 0$. Mais alors on trouve l'origine qui est bien solution .

$$\boxed{x\left(x^2+y^2\right) = a(y^2-x^2)}$$

2a) idem **1a)** :$x^2+y^2+2ax = 0$
2b)

- Pour avoir $M(t)$ on pose $\begin{cases} y = tx \\ x^2+y^2+2ax = 0 \end{cases}$ ce qui donne après simplification par x $\begin{cases} x = -\frac{2a}{1+t^2} \\ y = -\frac{2at}{1+t^2} \end{cases}$

On élimine du calcul les points tels que $x = 0$ donc sur le cercle le point O qui ne se retrouve pas dans l'équation précédente mais qui correspondra au point limite $t- > \pm\infty$.

- Pour avoir $H(t)$ on pose $\begin{cases} y = tx \\ 2a \end{cases}$ ce qui donne après simplification par x $\begin{cases} x = 2a \\ y = 2at \end{cases}$

- reste à prendre le milieu

$$\boxed{J(t) = \begin{pmatrix} a\frac{t^2}{1+t^2} \\ a\frac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix}}$$

2c) Les deux coordonnées sont des fonctions C^∞ et $\frac{dJ}{dt}(t) = \begin{pmatrix} a\frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ a\frac{t^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$.
L'unique point stationnaire est le point tel que $t = 0$ donc le point O .
En ce point la pente de la tangente est la limite de $\frac{y}{x} = t$. La tangente est horizontale.
Le développement limité à l'ordre 3 en zéro donne sans problème $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^2 + o(t^2) \\ 0 + o(t^2) \end{pmatrix}$ donc $M"(0) = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix}$.

- L'équation de la tangente en 0 est donc $y = 0$ du type voulu si $t_0 = 0$.
- si $t_0 \neq 0$ On l'équation de la tangente est $\det\left(J(t_0)P, \frac{dJ}{dt}(t_0)\right) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - \frac{at_0^2}{1+t_0^2} & \frac{2at_0}{(1+t_0^2)^2} \\ y - \frac{at_0^3}{1+t_0^2} & \frac{at_0^2(3+t_0^2)}{(1+t_0^2)^2} \end{vmatrix} = 0$$

$$t_0(3+t_0^2)\left(x - \frac{at_0^2}{1+t_0^2}\right) - 2\left(y - \frac{at_0^3}{1+t_0^2}\right) = 0 \text{ en simplifiant par } \frac{at_0}{(1+t_0^2)^2}$$

$$\boxed{t_0(3+t_0^2)x - 2y = a\frac{t_0^3(3+t_0^2) - 2t_0^3}{1+t_0^2} = at_0^3}$$

Question clé qui permet de vérifier les calculs.

- Par parité de x et imparité de y le support de la courbe est symétrique par rapport à Ox . Sur $\mathbb{R}^+$ x et y sont croissant . Si t tend vers $+\infty$ x tend vers a et y vers $+\infty$.

2e) On a $x = a\frac{t^2}{1+t^2}$ et $y = tx$. Donc pour x non nul $t = \frac{y}{x}$ donc $x = a\frac{y^2}{x^2+y^2}$ d'où l'équation

$$x(x^2+y^2) = ay^2$$

Si $x = 0$ le point est à l'origine , qui est solution de la seconde équation .
Réciproquement si $x(x^2+y^2) = ay^2$ alors en introduisant $y = tx$ on retrouve l'équation paramétrique.

-

$$\boxed{x(x^2+y^2) = ay^2}$$

3a) déjà vu en cours : faire le Pivot de Gauss $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \det\left({}^t mat \left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \right) \right)$$

3b) On commence par mettre a en facteur dans les deux premières colonnes puis on retranche la première à la troisième . Ensuite on retranche la première ligne aux deux autres.

$$\begin{vmatrix} at_1^2 & at_1^3 & 1+t_1^2 \\ at_2^2 & at_2^3 & 1+t_2^2 \\ at_3^2 & at_3^3 & 1+t_3^2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1^3 & 1 \\ t_2^2 & t_2^3 & 1 \\ t_3^2 & t_3^3 & 1 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} t_2^2 - t_1^2 & t_2^3 - t_1^3 \\ t_3^2 - t_1^2 & t_3^3 - T_1^3 \end{vmatrix}$$

On factorise $(t_2 - t_1)$ dans la première ligne et $(t_3 - t_1)$ dans la seconde :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} at_1^2 & at_1^3 & 1+t_1^2 \\ at_2^2 & at_2^3 & 1+t_2^2 \\ at_3^2 & at_3^3 & 1+t_3^2 \end{vmatrix} &= a^2(t_3-t_1)(t_2-t_1) \begin{vmatrix} t_2+t_1 & t_2^2+t_1t_2+t_1^2 \\ t_3+t_1 & t_3^2+t_3t_1+t_1^2 \end{vmatrix} \\
&= a^2(t_3-t_1)(t_2-t_1) \begin{vmatrix} t_2+t_1 & t_2^2+t_1t_2+t_1^2 \\ t_3-t_2 & t_3^2-t_2^2+t_3t_1-t_2t_1 \end{vmatrix} : L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= a^2(t_3-t_1)(t_2-t_1)(t_3-t_2) \begin{vmatrix} t_2+t_1 & t_2^2+t_1t_2+t_1^2 \\ 1 & t_1 +_2 + t_3 \end{vmatrix} \\
&= a^2(t_3-t_1)(t_2-t_1)(t_3-t_2) \left((t_2+t_1)(t_1+t_2+t_3) - \left(t_2^2+t_1t_2+t_1^2\right) \right) \\
&= a^2(t_3-t_1)(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3)
\end{aligned}$$

3c) Trois points sont alignés si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} \frac{2a}{1+t_1^2} & \frac{2at_1}{1+t_1^2} & 1 \\ \frac{2a}{1+t_2^2} & \frac{2at_2}{1+t_2^2} & 1 \\ \frac{2a}{1+t_3^2} & \frac{2at_3}{1+t_3^2} & 1 \end{vmatrix}$ est nul .Si on multiplie la ligne i par $\left(1+t_i^2\right)$ on retrouve $D(t_1, t_2, t_3)$.

Les points sont distincts donc $(t_i - t_j) \neq 0$ pour $i \neq j$. a est aussi non nul .

$$\boxed{\text{Trois points sont alignés si et seulement } (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) = 0}$$

3c) La formule précédente donne $t_3 = -\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}$ si $t_1 + t_2 \neq 0$.

On vérifie $t_3 \neq t_1 \Leftrightarrow t_1 = -2t_2$

Avec les notations de la question $t(\varepsilon) = -\frac{t_0(t_0+\varepsilon)}{2t_0+\varepsilon}$ si $2t_0 + \varepsilon \neq 0$ et $t_0 + \varepsilon \neq -2t_0$ donc si $\varepsilon \neq -2t_0$ et $\varepsilon \neq -3t_0$. Comme on veut faire tende ε vers zéro , cette condition est remplie pour ε assez petit si $t_0 \neq 0$.

On a alors si $t_0 \neq 0$: $\lim (t(\varepsilon)) = -\frac{t_0}{2}$.

Par contre si $t_0 = 0$ la droite $OJ(\varepsilon)$ ne recoupe pas la courbe .

Par définition de la tangente un vecteur unitaire de $J(t_0)J(t_0+\varepsilon)$ tend vers un vecteur unitaire de la tangente. Le vecteur $\overrightarrow{J(t_0)J(t(\varepsilon))}$ tend donc aussi vers un vecteur directeur de la tangente , si la limite est non nulle. Le vecteur $\overrightarrow{J(t_0)J(-t_0/2)}$ est un vecteur directeur de la tangente s'il est non nul.

Si $t_0 \neq 0$ Le point $J(-t_0/2)$ est donc point d'intersection de la courbe et de la tangente.

Or $y(t)$ est strictement croissante (dérivée positive , strictement positive sauf en un nombre fini de points) . Donc

$$\overrightarrow{J(t_0)J(t_0/2))} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow t_0 = -t_0/2 \Leftrightarrow t_0 = 0$$

$$\boxed{\text{Si } t_0 \neq 0 \text{ la tangente en } J(t_0) \text{ recoupe la courbe au point de paramètre } t_0/2}$$

Pour la dernière question on doit montrer (toujours en excluant la tangente à l'origine)

$$D(t_1, t_2t_3) = 0 \Rightarrow D(-t_1/2, -t_2/2, -t_3/2) = 0$$

ce qui se vérifie sans problème sur la forme développée de D .