CCP PSI 2007 math 2

1.1 On a

$$a_{1,1}=\binom{p}{p}=1,\ a_{1,n-p+1}=\binom{n}{p},\ a_{n-p+1,1}=\binom{n}{n}=1,\ a_{1,n-p+1}=\binom{2n-p}{n}$$

1.2 On a $d_n=\det(1)=1, d_{n-1}=\det\begin{pmatrix}1 & n\\ 1 & n+1\end{pmatrix}=1$,

$$d_{n-2}=\det\begin{pmatrix}1 & n-1 & \dfrac{n(n-1)}{2}\\ 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2}\\ 1 & n+1 & \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & n-1 & \dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 2 & 2n+1\end{pmatrix} \text{ en retranchant } L_1 \text{ au deux autres lignes}$$

$$= 1$$

$$\boxed{d_n=d_{n-1}=d_{n-2=1}}$$

1.3.1 On sait que $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$

La nouvelle ligne a donc les coefficients : $\left\{\begin{array}{c} a'_{i,1}=1-1=0\\ a'_{i,j}=a_{i,j}-a_{i-1,j}=\binom{p+i+j-2}{p+i-1}-\binom{p+i+j-3}{p+i-2}=\binom{p+i+j-3}{p+i-1}\end{array}\right.$

en prenant : $\left\{\begin{array}{c} n=p+i+j-3\\ p=p+i-2\end{array}\right.$

1.3.2 Les opérations effectuées laissant le déterminant invariant, on a $\det(A_p)=\det(A'_p)$.

Mais d'après le calcul précédent :$A'_p=\begin{pmatrix}1 & ?\\ 0 & D\end{pmatrix}$

avec $D\in\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$ et $d_{i,j}=a'_{i+1,j+1}=\binom{p+i+j-1}{p+i}=\binom{(p+1)+i+j-2}{(p+1)+i-1}$. C'est donc le coefficient ligne i colonne j de A_{p+1}

$$A'_p=\begin{pmatrix}1 & ?\\ 0 & A_{p+1}\end{pmatrix}$$

donc $\det(A_p)=\det(A'_p)=\det(A_{p+1)}$

$$d_p=d_{p+1}$$

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{\forall p\in[\![0,n]\!],\ d_p=d_n=1}$$

2.1 On a :$D_0=\det(1)=1,\ D_1=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=1=1, \Delta_0=\det(1)=1=1,\ \Delta_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=1$,

$$D_2=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 24\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 24\end{pmatrix}=4$$

$$\Delta_2=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}=1$$

2.2 Comme $\binom{i+j}{i}=\dfrac{(i+j)!}{i!j!}$, on peut factoriser chaque ligne de Δ_n par $\dfrac{1}{i!}$ puis chaque colonne par $\dfrac{1}{j!}$. Le déterminant étant n-linéaire, on a alors

$$\boxed{\Delta_n=\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)^2 D_n}$$

2.3 On a en reprenant une numérotation des lignes/colonnes entre 1 et $n+1$:

$$\Delta_n=\left(\binom{i+j}{i}\right)_{0\le i,j\le n}=\left(\binom{i'+j'-2}{i'-1}\right)_{1\le i',j'\le n+1}=d_0=1$$

et donc

$$\boxed{D_n=\prod_{k=0}^{n}(k!)^2}$$