Remarque : le début des parties 2 et étudie une décomposition en "éléments simples" d'une fraction dans un cas particulier avec des racines multiples. c'est à dire dans un cas ou l'interpolation de Lagrange n'est pas utilisable.
Remarque : on ferra attention aux notations pas tout à fait usuel. L'indéterminée des polynômes et des fractions rationnelles est notées x .; la notation X *représentant une matrice.*

PARTIE 1

1. Le sujet demande de montrer le théorème de division euclidienne.
   - existence : On fait une récurrence forte sur le degré de g :
     - si $d^\circ(g) \leq 2, q=0, f=g$ est solution
     - si la propriété est vraie pour tout polynôme g_0 de degré $\leq n-1$. alors soit $g=\sum_{k=0}^{n} g_n x^n$ un polynôme de degré n . on prend $g_0 = g - g_n x^{n-3} P(x)$. On obtient un polynôme de degré $\leq n-1$ qui se décompose $g_à = Pq_0 + f_0$, $f_0 \in \mathbb{C}_2[X]$ et alors $g = P\left(g_n x^{n-3} + q_0\right) + f_0$. D'où l'existence de la décomposition.
   - unicité : si on a deux décompositions $g = Pq + f = PQ + F$ avec les conditions de degré alors $P(q-Q) = F - f$ et le degré donne $d^\circ(q-Q) < 0$ et comme on a un polynôme $q - Q = 0$ donc $q = Q$ puis $f = F$

$$\boxed{\forall g \in \mathbb{C}[X], \exists !(q,f) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_2[X]\ ,\ g = Pq + f}$$

2. Soit $m \in \mathbb{C}$. On pose $Q(x) = P(x) - P(m)$. Comme $Q(m) = 0$, le polynôme $x - m$ divise $Q(x)$dans $\mathbb{C}[X]$ il existe $f(x)$ (le quotient) tel que $Q(x) = (x-m)f(x)$. Si on regarde le degré $\mathrm{d}^\circ(P) = 3$ donc $d^\circ(f) = 2$

$$\boxed{\frac{P(x)-P(m)}{x-m} = f(x) \text{ est un élément de } \mathbb{C}_2[X]}$$

3. question de cours sur les polynômes matriciels:
   - $\varphi(1) = 1.I$
   - On vérifie que φ est linéaire
   - Puis par bilinéarité (à justifier) que comme $X^i X^j = X^{i+j}$ on a $\varphi(A) \circ \psi(A) = (\varphi\psi)(A)$

$$\boxed{\varphi \text{est morphisme d'algèbre de } \mathbb{C}[X] \text{ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$$

PARTIE 2

1. Comme $\deg(f) \leq 2$, le théorème de Taylor donne $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''^2(a)(x-a)^2$, donc en divisant par $P(x)$

$$\boxed{\frac{f(x)}{P(x)} = f(a)\frac{1}{(x-a)^3} + f'(a)\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{f''(a)}{2}\frac{1}{(x-a)}}$$

2. D'après I2 on sait que $f(x) = \dfrac{P(x)-P(m)}{x-m}$ est un polynôme de degré 2 que l'on peut calculer:

$$\begin{aligned} P(x) - P(m) &= (x-a)^3 - (m-a)^3 \\ &= ((x-a)-(m-a))((x-a)^2 + (x-a)(m-a) + (m-a)^2) \\ &= (x-m)((x-a)^2 + (x-a)(m-a) + (m-a)^2) \end{aligned}$$

   donc :

$$\frac{P(x)-P(m)}{x-m} = (x-a)^2 + (x-a)(m-a) + (m-a)^2$$

   et en divisant par $P(x) = (x-a)^3$:

$$\boxed{\frac{f(x)}{P(x)} = (m-a)^2\frac{1}{(x-a)^3} + (m-a)\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-a)}}$$

3. .

1. Le calcul donne $\Phi_X(x) = (1-x)^3$. La matrice X admet 1 pour unique valeur propre. Si X était diagonalisable, X serait donc semblable à donc égale à I , absurde :

   La matrice X n'est pas diagonalisable.

   Le calcul donne : $\boxed{(X-1)^3 = 0}$

2. Le calcul donne $\det(X - mI) = (1-m)^3$ donc $\underline{X - mI \text{ est inversible si et seulement si } m \neq 1}$.

   On suppose donc que $m \neq 1$. Nous considérons le polynôme :

$$f(x) = \frac{(x-1)^3 - (m-1)^3}{x-m}$$

   On a $(x-m)f(x) = (x-1)^3 - (m-1)^3$, donc, en utilisant 1.3 (avec $A = X$),

$$(X - m)f(X) = (X - I)^3 - (m-1)^3 I = -(m-1)^3 I$$

   d'où$(X - m)^{-1} = \dfrac{-1}{(m-1)^3} f(X)$

   Or **2.**2 (avec $a = 1$) donne, après multiplication par $P(x) = (x-1)^3$,

$$f(x) = \alpha(m,1) + \beta(m,1)(x-1) + \gamma(m,1)(x-1)^2$$

   d'où:

$$f(X) = \alpha(m,1)\, I + \beta(m,1)(X - I) + \gamma m, 1)(X - I)^2$$

   et finalement :

$$\boxed{(X - m)^{-1} = \frac{1}{1-m} I - \frac{1}{(1-m)^2}(X - I) + \frac{1}{(1-m)^3}(X - I)^2}.$$

PARTIE 3

1. Soit $f(x)$un polynôme de degré ≤ 2. On veut donc décomposer

$$f(x) = \alpha_1 f(a)(x-b) + (\beta_1 f(a) + \beta_2 f'(a))(x-a)(x-b) + \gamma_1 f(b)(x-a)^2$$

   Une analyse , synthèse doit être possible mais la vérification ne me semble pas simple. je préfère montrer l'existence d'une décomposition puis la calculer:

   On vérifie que $(x-b), (x-a)(x-b), (x-a)^2$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$:

   - la famille a le bon cardinal
   - elle est libre : si pour tout x $A(x-b) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)^2 = 0$, alors $x = a$ donne $A = 0$ (car $b \neq a$) , puis $x = b$ donne $C = 0$ et donc $B = 0$
   - On peut donc décomposer $f(x) = A(x-b) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)^2$ et alors :
     - $x = a$ donne $A = \dfrac{f(a)}{a-b}$
     - $x = b$ donne $C = \dfrac{f(b)}{(b-a)^2}$
     - puis on regarde et dérive :

$$\frac{f(x)}{x-b} = A + B(x-a) + C\frac{(x-a)^2}{(x-b)}$$

       donc

$$\frac{(x-b)f'(x) - f(x)}{(x-b)^2} = B + C\frac{2(x-a)(x-b) - (x-a)^2}{(x-b)^2}$$

       la valeur en $x = a$ donne :

$$B = \frac{(a-b)f'(a) - f(a)}{(a-b)^2}$$

   Finalement :

$$\boxed{\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{1}{(a-b)}\frac{f(a)}{(x-a)^2} + \frac{-\frac{1}{(a-b)^2}f(a) + \frac{1}{a-b}f'(a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)^2}\frac{f(b)}{x-b}}$$

2. Soit g un polynôme (quelconque) de $\mathbb{C}[X]$. On applique la division euclidienne du **1.**1 :

$$g = Pq + f \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{C}[X] \qquad \text{et} \quad f \in \mathbb{C}_2[X]$$

d'où on déduit :

$$\frac{g(x)}{P(x)} = q(x) + \frac{f(x)}{P(x)}$$

Comme $g = Pq + f$ et $P(a) = P(b) = 0$ on a $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.
Mais comme a est racine double de P en dérivant : $g' = P'q + Pq' + f'$ et donc $g'(a) = f'(a)$
De plus $f \in \mathbb{C}_2[X]$donc on déduit de **3.**1 que

$$\boxed{\frac{g(x)}{P(x)} = q(x) + \frac{1}{(a-b)}\frac{g(a)}{(x-a)^2} + \frac{-\frac{1}{(a-b)^2}g(a) + \frac{1}{a-b}g'(a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)^2}\frac{g(b)}{x-b}}$$

3.

1. Le calcul montre que le polynôme caractéristique de X est $\Phi_X(x) = (2-x)(x-1)^2$. Les valeurs propres sont donc 2, de multiplicité 1, et 1, de multiplicité 2. Comme

$$X - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 \\ -4 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le rang de $X - I$ est égal à 2 donc la dimension du sous-espace propre E_1associé à la valeur propre 1est égale à $1 < 2$ (ordre de multiplicité de la valeur propre 1) : La matrice X n'est pas diagonalisable.

Le calcul donne : $\underline{(X-I)^2(X-2I) = 0}$

2. On applique **3.**2 avec $g(x) = x^n$, $a = 1$et $b = 2$:

$$\frac{x^n}{P(x)} = q(x) - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1-n}{(x-a)} + \frac{2^n}{x-b}$$

On a donc $x^n = P(x)q(x) - (x-2) - (n+1)(x-1) + 2^n(x-1)^2$. En passant aux polynômes matriciels et en utilisant $P(X) = 0$, on obtient : $X^n = -(X - 2\,I) - (n+1)(X-I)(X-2I) + 2^n(X-I)^2$ et avec $n = 1995$

$$\boxed{X^{1995} = -(X - 2\,I) - (1996)(X-I)(X-2I) + 2^{1995}(X-I)^2}$$

4.

1. Le calcul montre que : $\underline{X^2(X-I) = 0}$

2. le calcul donne $\det(X - mI) = m^2(1-m)$ donc $X - m$est inversible si et seulement si $m \notin \{0, 1\}$.

3. On suppose que $m \notin \{0,1\}$. On pose $P(x) = x^2(x-1)$et $f(x) = \dfrac{P(x) - P(m)}{x-m} = x^2 + (m-1)x + m(m-1)$. En utilisant les résultats de **3.**1 avec $a = 0$, $b = 1$et $f(x) = x^2 + (m-1)x + m(m-1)$, on obtient :

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{m(1-m)}{x^2} + \frac{1-m^2}{x} + \frac{m^2}{x-1}$$

et donc

$$f(x) = m(1-m)(x-1) + (1-m^2)x(x-1) + m^2x^2$$

Comme $(x-m)f(x) = P(x) - P(m)$et $P(X) = 0$ on a l'égalité

$$(X - m\,)f(X) = -P(m)$$

donc, puisque $P(m) = m^2(m-1) \neq 0$:

$$(X - m\,)^{-1} = \frac{-f(X)}{P(m)} = \frac{-f(X)}{m^2(m-1)}$$

et par suite :

$$(X - mI)^{-1} = \frac{(X-I)}{m} + \frac{m+1}{m^2}\left(X^2 - X\right) - \frac{X^2}{m-1}$$