

Une lecture rapide du sujet montre que le thème principal est l'étude des racines d'une matrice .

Dans la première partie on s'oriente vers l'étude des racines carrées dans le cas d'une matrice diagonalisable

On commence donc par réfléchir à quelques exemples:

- $f^2 = Id$ caractérise les symétries .Les solutions de $M^2 = I_n$ sont donc toutes les matrices des symétries.
- $M^2 = 0_n$ caractérise , outre la matrice nulle , les matrices nilpotentes d'ordre 2 .
- un projecteur vérifie $p^2 = p$ donc est sa propre racine carrée (ce qui ne veut pas dire l'unicité de la solution)
- Sans doute à travers les exercices que vous avez pu travaillé hors cours avez vous d'autres exemples en tête.

Dans les autres parties on travaille sur l'exemple de B . Une étude très rapide de cette matrice montre qu'elle est non diagonalisable et donc que ces parties sont très probablement indépendantes de la première . Ces parties conduisent progressivement à la question IV4 qui donne la forme générale de B^r (avec $x = 1, y = 2, z = 3$) . Cette question où figure enfin la forme explicite des solutions est donc un outil clé pour vérifier les calculs précédents . Il est important de la repérer avant de commencer la seconde partie .

1. PARTIE

On notera $Diag(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de diagonale x_1, \dots, x_n

1. Si M est diagonalisable il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

On a alors $A = M^2 = PD^2P^{-1}$. Comme D est diagonale D^2 est aussi diagonale donc A est diagonalisable.

$$\boxed{M \text{ diagonalisable} \Rightarrow M^2 \text{ diagonalisable}}$$

2. Si A est diagonalisable il existe une matrice $D = Diag(x_1, \dots, x_n)$ diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Comme on est dans les complexes tout élément admet au moins une racine carrée:

$$\forall i \in [1..n], \exists y_i \in \mathbb{C}, y_i^2 = x_i$$

Remarque: *N'oubliez pas que dans le complexes la notation $\sqrt{\quad}$ n'est pas légitime*

Soit alors $M = PDiag(y_1, \dots, y_n)P^{-1}$. Cette matrice est diagonalisable de carré A .

$$\boxed{\text{Toute matrice diagonalisable admet une racine carrée diagonalisable}}$$

3. Evident $MA = AM = M^3$

En général une question aussi évidente vaut 0 au barème . Elle a seulement comme but d'orienter la réflexion du candidat. Ici ça commute donc ... il y a plein de S.E.V. stables .

4.

1. Si μ est valeur propre de ϕ alors il existe un vecteur x non nul tel que $\phi(x) = \mu x$. On a alors $\phi^2(x) = \mu^2 x$. Et comme x est non nul μ^2 est valeur propre de ϕ^2 .

2. Même chose si x est vecteur propre de ϕ , le même calcul montre que x est vecteur propre de ϕ^2 .

La réciproque est fausse: On prend une symétrie autre que $\pm Id$ tout vecteur est propre pour le carré mais pas pour la symétrie

5.

1.
 - (1) \Leftrightarrow (2) est du cours (à rédiger en début de problème)
 - (3) \Leftrightarrow (4) est la même propriété pour ϕ^2
 - (1) \Leftrightarrow (4) en passant par le déterminant . Comme $\det(\phi^2) = (\det(\phi))^2$ on a :

$$\phi \text{ non injective} \Leftrightarrow \det(\phi) = 0 \Leftrightarrow \det(\phi^2) = 0 \Leftrightarrow \phi^2 \text{ non injective}$$

$$\boxed{\text{Les 4 propositions sont équivalentes}}$$

2. Les dimensions des S.E.V. ne sont pas connue donc:

On vérifie l'inclusion , la somme et l'unicité (ou l'intersection):

- $Ker(\phi - \mu Id) \subset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
Soit $v \in Ker(\phi - \mu Id)$ on a alors $\phi(v) = \mu v$ donc $\phi^2(v) = \mu^2 v = \lambda v$ et donc $v \in Ker(\phi^2 - \lambda Id)$
- $Ker(\phi + \mu Id) \subset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
Idem car $(-\mu)^2 = \lambda$
- $Ker(\phi - \mu Id) + Ker(\phi + \mu Id) \subset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
Conséquence directe des inclusions qui précèdent.
- $Ker(\phi - \mu Id) + Ker(\phi + \mu Id) \supset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
Soit $x \in Ker(\phi^2 - \lambda Id)$ On cherche $x = x_1 + x_2, x_1 \in Ker(\phi - \mu Id), x_2 \in Ker(\phi + \mu Id)$
– analyse: Si x_1 et x_2 existent on a $\phi(x_1) = \mu x_1$ et $\phi(x_2) = -\mu x_2$ donc $\phi(x) = \mu(x_1 - x_2)$. On peut donc résoudre : (possible car $\lambda \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0$)

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\phi(x)}{\mu} \right), x_2 = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\phi(x)}{\mu} \right)$$

– synthèse:

On a bien $x_1 + x_2 = x$ de façon évidente .

De plus $x_1 \in Ker(\phi - \mu Id)$ car $\phi(x_1) = \frac{1}{2} \left(\phi(x) + \frac{\phi^2(x)}{\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\phi(x) + \frac{\lambda x}{\mu} \right) = \mu x_1$ car $\lambda = \mu^2$

De même $x_2 \in Ker(\phi + \mu Id)$

– Ne négligez surtout pas la synthèse . C'est le seul endroit où servent les hypothèses.

- Le calcul précédent montre l'unicité de la décomposition de x donc prouve que la somme est directe:

$$\boxed{Ker(\phi^2 - \lambda Id) = Ker(\phi - \mu Id) \oplus Ker(\phi + \mu Id)}$$

3. Si ϕ^2 est diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres

$$E = \bigoplus_{i=1}^p (Ker(\phi^2 - \lambda_i Id))$$

Notons μ_i un complexe tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$

- Si 0 n'est pas valeur propre de ϕ on peut appliquer le calcul précédent à chaque sous espace propre:

$$E = \left(\bigoplus_{i=1}^p (Ker(\phi - \mu_i Id)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^p (Ker(\phi + \mu_i Id)) \right)$$

E est somme directe des sous espaces propres de ϕ donc ϕ est diagonalisable
de plus $Ker(\phi) = Ker(\phi^2) = \{0\}$

- Le seul cas à problème est le cas où ϕ n'est pas injective . A l'ordre près on peut supposer $\lambda_p = 0$

$$E = \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} (Ker(\phi^2 - \lambda_i Id)) \right) \oplus Ker(\phi^2)$$

$$E = \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} (Ker(\phi - \mu_i Id)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} (Ker(\phi + \mu_i Id)) \right) \oplus Ker(\phi^2)$$

Si $Ker(\phi^2) = Ker(\phi)$ on retrouve que E est somme directe des sous espaces propres de ϕ donc que ϕ est diagonalisable.

Si ϕ est diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres de ϕ . Or si μ est valeur propre de ϕ μ^2 est valeur propre de ϕ^2 d'après I4 . Donc $\mu = 0$ ou il existe i tel que $\mu = \pm \mu_i$.

$$E = \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} (Ker(\phi - \mu_i Id)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} (Ker(\phi + \mu_i Id)) \right) \oplus Ker(\phi)$$

$Ker(\phi)$ et $Ker(\phi^2)$ ont donc la même dimension . Et comme l'inclusion $Ker(\phi) \subset Ker(\phi^2)$ est évidente on aura l'égalité.

$$\boxed{(\phi^2 \text{ diagonalisable}) \Rightarrow (\phi \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow Ker(\phi) = Ker(\phi^2))}$$

6. Si f possède m valeurs propres distinctes f est diagonalisable et les sous espaces propres sont des droites . D'après la question I3 f et ϕ commutent donc les sous espaces propres de f sont stables par ϕ . Mais une droite stable est engendrée par un vecteur propre . Donc tout vecteur propre de f est un vecteur propre de ϕ .

Donc dans une base de vecteurs propres de f où $Mat(f) = Diag(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $Mat(\phi) = Diag(\pm \mu_1, \dots, \pm \mu_m)$ avec les notations précédentes . Comme tout complexe admet au plus 2 racines carrées f admet au plus 2^m racines carrées.

et même exactement 2^m si 0 n'est pas valeur propre et 2^{m-1} sinon .

7. C'est une application de la question précédente . Les calculs ne sont pas rédigés ici.

A est diagonalisable de valeurs propres $-1, 1$ et 4 . Il existe donc 8 solutions au problème .

En finissant de diagonaliser $A = PDP^{-1}$ avec $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Les 8 solutions sont

cherchées sont donc $P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 i & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} & \frac{i\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} & 0 \\ \frac{i\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} & \frac{i\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [1..3], \varepsilon_i = \pm 1$

On remarque que les matrices trouvées sont deux à deux opposées . Leur somme est nul et leur produit est A^4 .

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 256 \end{pmatrix}$$

8.

1. Si λ est une valeur propre de multiplicité $k \geq 2$ la matrice de f dans une base de vecteurs propres sera du type :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_k & (0) \\ (0) & M' \end{pmatrix}$$

Soient alors S la matrice d'une symétrie en dimension k, μ une racine carrée de λ et N une racine carrée de M' qui existe d'après I2 car M' est diagonalisable . Alors $\begin{pmatrix} \mu S & (0) \\ (0) & N \end{pmatrix}$ est une racine carrée de M . Or comme $k \geq 2$ il existe une infinité de symétries (prendre les symétries par rapport à une droite) donc une infinité de racines carrées pour M .

Si M est diagonalisable et admet une valeur propre multiple il existe une infinité de racines carrées

2. Même principe dans une bonne base f a la matrice $\begin{pmatrix} (0)_k & (0) \\ (0) & M' \end{pmatrix}$ Si T est nilpotente d'indice 2 alors $\begin{pmatrix} T & (0) \\ (0) & N \end{pmatrix}$ est une racine carrée de M . Or il existe une infinité de matrice T : Prendre (e_i) une base de vecteurs propres et pour tout réel $\alpha \phi_T$ telle que $\phi_T(e_1) = \alpha e_2$ et pour $i > 1 \phi_T(e_i) = \vec{0}$

Si 0 est valeur propre multiple il existe une infinité de racines carrées

2. PARTIE

1. B est triangulaire . Son spectre est donc l'ensemble des termes diagonaux . 1 est la seule valeur propre . Si B est diagonalisable B est semblable à I_3 donc $B = PI_3P^{-1} = I_3$. Absurde

B n'est pas diagonalisable

2.

1. On remarque que $J^2 = K, J^3 = K^2 = 0$ et $JK = KJ = 0$. On a donc $(yJ + zK)^2 = y^2K$ et pour $p > 2$, $(yJ + zK)^p = 0$

2. xI commute avec $yJ + zK$ on a donc par le binôme de Newton

$$(xI + yJ + zK)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p x^{n-p} (yJ + zK)^p = \sum_{p=0}^2 C_n^p x^{n-p} (yJ + zK)^p$$

puisque les autres termes sont nuls . Et donc

$$(xI + yJ + zK)^n = x^n I + nx^{n-1}(yJ + zK) + x^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} y^2 K$$

Ou encore

$$\forall n \geq 2, (C(x, y, z))^n = C(x^n, nx^{n-1}y, nx^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2)$$

Et vous avez tous vu que IV4 donne la forme général de B^r .

Peut-être avez trouvé un résultat qui ne concorde pas avec IV4 . N'espérez pas trop quand même que la réponse à la question IV4a soit non . Calculez alors B^2, B^3 à la main pour vérifier .

3. $B = C(1, 2, 3)$ donc pour $n \geq 2$

$$B^n = C(1, 2n, 3n + 2n(n-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$

On a là la vérification des calculs précédents en prenant $n = 2$ et $n = 3$ si on n'a pas vu IV4 .

3. Le déterminant de B vaut 1 donc B est inversible .

Un peu d'habitude de ce genre d'exercice laisse penser que la formule vraie dans \mathbb{N} l'est aussi dans \mathbb{Z} . On rédige donc :

Par cohérence avec la formule précédente posons pour $n < 0$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifions $B^n B^{-n} = I$. (Le calcul du produit de matrice devant être explicitement posé dans la copie) .

Avec un peu moins d'habitude on rédige un pivot de Gauss , comme la matrice est triangulaire ça va vite .

$$\forall n \in \mathbb{Z}, B^n = C(1, 2n, 3n + 2n(n-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. PARTIE

1.

1. Les produits par $B : M \rightarrow MB$ et $M \rightarrow BM$ sont linéaires donc aussi $M \rightarrow MB - BM$. Donc $F = \text{Ker}(M \rightarrow MB - BM)$ est un sous espace vectoriel de E .

2.

• f et ϕ commutent donc les sous espaces propres de f sont stables par ϕ . Or $E_1(f) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc M

est du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}$. Le calcul explicite des coefficients de $MB - BM$ donne alors $a = d = g, b = e$.

(Le sujet donnant la réponse ce calcul doit être détaillé) . Donc $M = aI + bJ + cK$

• (I, J, K) engendre le commutant F de B .

• En regardant la première ligne de $\lambda I + \mu J + \nu K = 0$ on trouve $\lambda = \mu = \nu = 0$ donc le système est libre . Etant générateur , c'est une base .

• La famille (I, B, B^2) a le bon cardinal , Elle est incluse dans le commutant de B . Il suffit donc de vérifier qu'elle est libre . Or

$$\lambda I + \mu B + \nu B^2 = \begin{pmatrix} \lambda + \mu + \nu & 2\mu + 4\nu & 3\mu + 10\nu \\ 0 & \lambda + \mu + \nu & 2\mu + 4\nu \\ 0 & 0 & \lambda + \mu + \nu \end{pmatrix}$$

Le système en (μ, ν) est de déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ donc $\mu = \nu = 0$ et en reportant sur la diagonale $\lambda = 0$.

$$F = \text{Vect}(I, J, K) = \text{Vect}(I, B, B^2)$$

3. Les matrices de F sont du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Leur spectre est réduit à $\{a\}$ et comme au III elles sont diagonalisables si et seulement si ce sont des matrices d'homothétie .

$$M \in F \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow M \in \text{Vect}(I)$$

2.

1. Cette question a déjà simplifié le calcul à la question précédente . Les seuls vecteurs propres de f sont les vecteurs du type $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$ qui sont bien propre pour ϕ .

La réciproque est fautive par exemple si ϕ est une homothétie .

Remarque : La réciproque est vraie ssi $\phi - Id$ est de rang 2 c'est à dire ssi le coefficient sur J dans la base (I, J, K) est non nul .

2. Si $\phi(x) = \lambda x$ alors $\phi(f(x)) = \phi \circ f(x) = f \circ \phi(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

De plus $f(x) \neq \vec{0}$ car $x \neq \vec{0}$ et f est un automorphisme. Donc

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est propre pour } \phi, \text{ alors } f(x) \text{ est propre pour } \phi}$$

3.

1. Les droites stables sont engendrées par les vecteurs propres. Il existe une seule droite stable $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Les plans (hyperplans) stables ont une équation du type $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ avec

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \text{ et } \exists \mu \in \mathbb{C}, (a, b, c) B = \mu (a, b, c)$$

Le système se résout en transposant et comme B est triangulaire il n'y a aucun problème. Il existe un unique plan stable d'équation $x_3 = 0$

3.

- Le résultat est évident pour les sous espaces triviaux $\{\vec{0}\}$ et \mathbb{C}^3 .
- le résultat est déjà connu pour la droite puisque c'est le sous espace propre.
- Pour le plan il suffit de vérifier que $(0, 0, 1) C(x, y, z) = x(0, 0, 1)$. Le plan est stable par ϕ .
- La réciproque est fautive en particulier si ϕ est une homothétie car alors tous les sous espaces sont stables par ϕ .

4. PARTIE

1.

1. Si $M^p = B$ alors $MB = BM = M^{p+1}$ donc $M \in F$

2. On a $(\det(M))^p = \det(M^p) = \det(B) = 1$ donc $\det(M)$ est une racine p -ème de l'unité :

$$\boxed{\exists k \in [0..p-1], \det(M) = e^{2ik\pi/p}}$$

2.

1. Si p est impair et M réelle alors $\det(M) = 1$. Comme on sait que $M \in F$ on peut poser $M = C(x, y, z)$ le déterminant donne donc $x^{3p} = 1$ donc $x = 1$. Reste à résoudre $(C(1, y, z))^p = C(1, 2, 3)$. Mais d'après II2 on doit résoudre $C(1, py, pz + \frac{p(p-1)}{2}y^2) = C(1, 2, 3)$ et comme (I, J, K) est un système libre il reste à résoudre

$$\begin{cases} py = 2 \\ pz + \frac{p(p-1)}{2}y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est impair } M^p = B \text{ admet une seule solution réelle } C(1, \frac{2}{p}, \frac{2+p}{p^2})}$$

2. Si p est paire on a le même calcul si $x = 1$. Mais cette fois ci $\det(x)$ peut aussi valoir -1 . Au quel cas le système devient :

$$\begin{cases} -py = 2 \\ -pz + \frac{p(p-1)}{2}y^2 = 3 \end{cases}$$

de solution $-C(1, \frac{2}{p}, \frac{2+p}{p^2})$ (ce qui n'est pas surprenant)

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, B^{1/p} = C(1, \frac{2}{p}, \frac{2+p}{p^2})}$$

Remarque 1 : Et on se précipite à la question 4 pour vérifier les calculs.

Remarque 2: C'est une notation usuelle ...mais c'est la première fois que l'on parle de puissance non entière d'une matrice. On peut espérer étendre des résultats connus dans les réels mais il faudra tous les prouver.

3. On résout dans les complexes maintenant $C(x^p, pyx^{p-1}, pzx^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}y^2x^{p-2}) = C(1, 2, 3)$. Soit, toujours à

cause de la base : $\begin{cases} x^p = 1 \\ pyx^{p-1} = 2 \\ pzx^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2}y^2x^{p-2} = 3 \end{cases}$. On a donc $x = \exp(2ik\pi/p), y = \frac{2}{px^{p-1}} = \frac{2x}{p}$ puis $z = (\frac{2+p}{p^2})x$.

$$\boxed{M^p = B \Leftrightarrow \exists k \in [0..p-1], M = e^{\frac{2ik\pi}{p}} B^{1/p}}$$

On trouve donc exactement p solutions distinctes à l'équation.

Remarque ce qui n'est pas évident du tout. L'étude des racines carrés dans le cas diagonalisable a montré qu'il y a en général plus de 2 solutions à l'équation $M^2 = A$.

3. Notons $M_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}} B^{1/p}$.

- $\sum_{k=0}^{p-1} M_k = \left(\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} \right) B^{1/p} = 0$
- $\prod_{k=0}^{p-1} M_k = \left(\prod_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} \right) (B^{1/p})^p = (-1)^{p-1} B$
- *La somme est le produit des racines p-ème de l'unité est classique . Si le résultat n'est pas connu utiliser le fait que c'est la somme et le produit des racines de l'équation $X^p - 1 = 0$*

4.

1. Oui et comme vous n'oubliez jamais de lire tout le sujet avant de commencer à travailler ça fait longtemps que vous avez vérifié ce "détail" , sinon que de temps perdu .
2. On utilise la règle de calcul

$$C(a, b, c).C(a', b', c') = C(aa', ab' + a'b, ac' + bb' + ca')$$

qui se vérifie en multipliant les matrices 3×3

- $\forall (r, s) \in \mathbb{R}^2, C^{r+s} = C^r C^s$ car

$$C^r C^s = C \left(\begin{array}{c} x^r x^s, x^r s y x^{s-1} + x^s r y x^{r-1}, \\ x^r \left(\frac{s(s-1)}{2} x^{s-2} y^2 + s x^{s-1} z \right) + r y x^{r-1} s y x^{s-1} + x^s \left(\frac{r(r-1)}{2} x^{r-2} y^2 + r x^{r-1} z \right) \end{array} \right)$$

Il n'y a qu'une ligne dans la parenthèse .

Le coefficient le plus délicat est celui de $x^{r+s-2} y^2$:

$$\frac{s(s-1)}{2} + r s + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{s^2 - s + 2rs + r^2 - r}{2} = \frac{(r+s)^2 - (r+s)}{2} = \frac{(r+s)(r+s-1)}{2}$$

On trouve bien C^{r+s} .

- $(CC')^r = C^r C'^r$ se vérifie de la même façon
- $(C^r)^s = C^{rs}$ se fait aussi en rédigeant le calcul .
- *Remarque : Que mettre dans une copie :*

- *Si vous arrivez ici à la fin du devoir et que vous pensez avoir tout à peu près bien traité vous pouvez aller vite . Comme pour le premier calcul ci dessus donnez la règle de calcul , insistez sur le détail de l'étape principale (pour bien montrer que vous avez compris le calcul) et concluez.*
- *Si vous arrivez ici pour grappiller quelques fractions de points après un devoir que vous pensez être raté il faut montrer clairement que vous savez **rédigier** un calcul . Comme la réponse est donnée l'examineur est convaincu que vous êtes capable de trouver le résultat ... mais comment... that is the question .*