

1. Préambule

A) C'est la formule de Pythagore:un triangle de cotés a et $a + 1$ est rectangle d'hypoténuse c si et seulement si :

$$a^2 + (a + 1)^2 = c^2$$

ce qui donne **R1** en développant.

B) Il est possible d'incrémenter a en testant le caractère entier de

$$\sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

en supposant connu a_{n-1} la procédure suivant va incrémenter a de 1 en mémorisant dans la variable b les valeurs successives :

```
>f:=a->sqrt(2*a^2+2*a+1);
>suisvant:=proc(a) local b;
> b:=a+1;
> while not(type(f(b),integer)) do b:=b+1;od;
> end
```

A la machine à calculer il faut remplacer le test `type(c, integer)` par un test du type: $E(c) = c$. Votre machine n'est, de toute façon, pas assez puissante pour ne pas être limitée assez vite par la taille des données. Avec 10 chiffres le calcul de $2a^2 + 2a + 1$ sera approché dès que $a > 100000$ soit ($n \geq 7$). Ce qui arrive assez vite. L'algorithme général (MAPLE ou non) doit penser à ce problème et être rédigé de façon à ne faire que du calcul exact.

C Cette question est indispensable pour initialiser les récurrence qui suivent. Le candidat qui ne réussit pas à faire le calcul à la machine peut quand même s'en sortir car la réponse est au V.B) en développant $(1 + \sqrt{2})^5$ et $(1 + \sqrt{2})^7$

$$\begin{cases} a_2=20, c_2=29 \\ a_3=119, c_3=169 \end{cases}$$

2. Les suites

A) pour $n = 1$ et $n = 2$ on a le système: $\begin{cases} 29+5\beta+\lambda=0 \\ 169+29\beta+5\lambda=0 \end{cases}$. Le système est un système linéaire de déterminant -4 . Il est de Cramer et admet une unique solution $\boxed{\beta = -6, \lambda = 1}$

$$\boxed{c_{n+1} = 6c_n - c_{n-1}}$$

Prenons l'hypothèse de récurrence pour $n \geq 1$ $H_n: v_n > v_{n-1}$ et $v_n \in \mathbb{N}$

- elle est vérifié pour $n = 1 : 5 > 1$ et $5 \in \mathbb{N}$.
- elle est vérifié pour $n = 2 : 29 > 1$ et $5 \in \mathbb{N}$
- si elle est vérifié pour $n - 2$ et $n - 1$ on a:

- $v_n = 6v_{n-1} - v_{n-2} = 5v_{n-1} + (v_{n-1} - v_{n-2})$ qui est d'après de récurrence la somme de deux éléments de \mathbb{N} .
- $v_n - v_{n-1} = 5v_{n-1} - v_{n-2} > 4v_{n-2} > 0$. en utilisant $v_{n-1} > v_{n-2} > 0$. On a donc $v_n > v_{n-1}$

- enfin $v_0 = 1 \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in \mathbb{N}}$$

Remarque : la suite est définie par une récurrence double , la démonstratio doit se faire par récurrence double , ou forte (en initialisant 2 termes)

Pour le calcul on constate que l'on a une suite récurrente double à coefficients constants. On cherche l'équation caractéristique $r^2 - 6r + 1 = 0$. En résolvant cette équation on trouve les racines p et q et donc: $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = ap^n + bq^n$. en prenant $n = 0$ et $n = 1$ on a le système: $\begin{cases} a+b=1 \\ (3+2\sqrt{2})a+(3-2\sqrt{2})b=0 \end{cases}$ système linéaire de déterminant $-4\sqrt{2}$. Sa résolution donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(1+\sqrt{2})p^n - (1-\sqrt{2})q^n}{2\sqrt{2}}}$$

Remarque:le jour du concours il est presque impossible de finir une telle question avec un résultat faux:il suffit de vérifier pour $n = 2$ et 3 par exemple.

Remarque : on peut arriver aussi à : $v_n = \frac{(2+\sqrt{2})p^n + (2-\sqrt{2})q^n}{4}$.

B) Le calcul pour $n = 1$ donne $a_2 - 6a_1 + a_0 = 2$. On vérifie cette valeur de b pour $n = 2$.
 comme au **II.A)** en partant de $u_{n+1} = 6u_n - u_{n-1} + 2$ on vérifie par récurrence $H_n : u_n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n-1} \geq 0$.
 — On a $w_{n+1} = u_{n+1} + 1/2 = 6(w_n - 1/2) - (w_{n-1} - 1/2) + 1/2 + 2 = 6w_n - w_{n-1}$.
 — On a une suite récurrente double du même type que celle de la question précédente avec $w_0 = 1/2, w_1 = 7/2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{(2 + \sqrt{2})p^n - (2 - \sqrt{2})q^n}{4\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2 + \sqrt{2})p^n - (2 - \sqrt{2})q^n}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}$$

remarque: $n = 2$ et on vérifie.

remarque : on a aussi : $u_n = \frac{(1 + \sqrt{2})p^n + 1 - \sqrt{2}q^n}{4} - \frac{1}{2}$

C) on a donc en remarquant que $pq = 1$

$$\begin{aligned} u_n^2 + (1 + u_n)^2 &= (w_n - 1/2)^2 + (w_n + 1/2)^2 = 2w_n^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} \left((2 + \sqrt{2})p^n - (2 - \sqrt{2})q^n \right)^2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} \left((6 + 4\sqrt{2})p^{2n} + (6 - 4\sqrt{2})q^{2n} - 4 \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \left((3 + 2\sqrt{2})p^{2n} + (3 - 2\sqrt{2})q^{2n} \right) + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_n^2 &= \frac{1}{8} \left((1 + \sqrt{2})p^n - (1 - \sqrt{2})q^n \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} \left((3 + 2\sqrt{2})p^{2n} + (3 - 2\sqrt{2})q^{2n} + 2 \right) \end{aligned}$$

$\boxed{(u_n, v_n) \text{ est un TRPI}}$

remarque:

Si le calcul n'aboutit pas c'est peut-être u_n ou v_n qui est faux : Il est alors urgent de vérifier pour $n = 0, 1, 2$ les valeurs trouvées.

une faute à ne pas faire: dire $a_n = u_n, c_n = v_n$ on ne sait pas encore si on a obtenu toutes les solutions.

3. L'algèbre linéaire

le sujet dit : **retrouver** il est donc interdit d'utiliser dans le cours de la question les valeurs calculées au **II**. Il faut impérativement repartir des relations de récurrence définissant les suites.

A1 Vérifions par récurrence sur n : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}$
 pour $n = 0$ on a $\begin{cases} 3 = 0 + 2 + 1 \\ 5 = 0 + 3 + 2 \end{cases}$ et pour $n = 1$ on a $\begin{cases} 20 = 9 + 10 + 1 \\ 29 = 12 + 15 + 2 \end{cases}$. La relation est vérifiée.
 Supposons la propriété vraie pour tout $p < n$.

On aura:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 6u_n - u_{n-1} + 2 = 6(3u_{n-1} + 2v_{n-1} + 1) - (3u_{n-2} + 2v_{n-2} + 1) + 2 \\ u_n &= 3(6u_{n-1} - u_{n-2} + 2) + 2(6v_{n-1} - v_{n-2}) + 1 = 3u_n + 2v_n + 1 \end{aligned}$$

On utilise la définition de u_n , l'hypothèse de récurrence au rang $n - 1$ et $n - 2$ et de nouveau les définitions de u_n et v_n .

Le calcul de v_n est similaire.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} = 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}}$$

A2 la traduction matricielle du système précédent donne:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B1 $(A - I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est de déterminant (-4) non nul. Un pivot de Gauss donne l'inverse:

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

B2 Comme A et I commute on peut utiliser l'identité remarquable $x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$:

$$(A - I)S_n = (A^n - I)$$

Soit :

$$\boxed{S_n = (A - I)^{-1}(A^n - I)}$$

B.3) Les premiers termes laissent penser que pour $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0 + S_n B$. Cette formule se vérifie alors par récurrence:

— pour $n = 1$: $X_1 = AX_0 + B$.

— si la propriété est vraie pour tout $p < n$ on a : $X_n = AX_{n-1} + B = A(A^{n-1}X_0 + S_{n-1}B) = A^n X_0 + (AS_{n-1} + I)B = A^n X_0 + S_n B$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, X_n &= A^n X_0 + (A - I)^{-1}(A^n - I)B \\ &= A^n (X_0 + (A - I)^{-1}B) - (A - I)B \end{aligned}$$

en remarquant que comme A et $A - I$ commutent, A et $(A - I)^{-1}$ commutent.

$$\boxed{X_n = A^n (X_0 + (A - I)^{-1}B) - (A - I)B}$$

remarque : la question **C** a été réécrite pour tenir compte de l'avancement du cours. Le sujet de Centrale diagonalise A pour calculer A^n .

C1) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

et le système $A^2 = uA + vI$ donne sans problème $A^2 = 6A - I$

C2) on retrouve l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$ de racines p et q .

Par division euclidienne on peut écrire $X^n = PQ_n + R_n$ avec $d^\circ(R_n) \leq 1$. On peut alors poser $X^n = PQ_n + (aX + b)$ et utiliser les racines pour avoir a et b en résolvant le système : $\begin{cases} p^n = ap + b \\ q^n = aq + b \end{cases}$

on peut aussi utiliser l'interpolation de Lagrange. Si $L_p = \frac{X-q}{p-q}$ et $L_q = \frac{X-p}{q-p}$, $R_n = R(p)L_p + R(q)L_q = p^n L_p + q^n L_q$

$$\boxed{R_n = \frac{p^n - q^n}{p - q} X + \frac{pq^n - qp^n}{p - q}}$$

remarque : vérification pour $n = 0, n = 1$

C3) On en déduit successivement comme $p - q = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} A^n &= R_n(A) = \frac{p^n - q^n}{p - q} A + \frac{pq^n - qp^n}{p - q} I \\ &= \frac{1}{p - q} \begin{pmatrix} (2\sqrt{2})(p^n + q^n) & 2(p^n - q^n) \\ 4(p^n - q^n) & (2\sqrt{2})(p^n + q^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X_0 + (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{p - q} \begin{pmatrix} (2\sqrt{2})(p^n + q^n) & 2(p^n - q^n) \\ 4(p^n - q^n) & (2\sqrt{2})(p^n + q^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(2\sqrt{2}+4)p^n + (2\sqrt{2}-4)q^n}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{(4\sqrt{2}+4)p^n + (4\sqrt{2}-4)q^n}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(\sqrt{2} + 2)p^n + (\sqrt{2} - 2)q^n}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ v_n &= \frac{(\sqrt{2} + 1)p^n + (\sqrt{2} - 1)q^n}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

remarque: A comparer à :

$$u_n = \frac{(2 + \sqrt{2})p^n - (2 - \sqrt{2})q^n}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, v_n = \frac{(1 + \sqrt{2})p^n - (1 - \sqrt{2})q^n}{2\sqrt{2}}$$

4. Un peu de géométrie

A Les couples (a_n, c_n) qui définissent un TRPI sont des couples d'éléments de \mathbb{N} par hypothèse et vérifient bien l'équation $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ d'après le IA. On a bien une équation de conique (éventuellement dégénérée) puisque l'équation est polynomiale de degré total 2 en x, y . D'autre part l'ensemble est non vide puisqu'on connaît déjà une infinité de TRPI.

B Pour réduire l'équation de la conique on écrit que son équation est équivalente à :

$$y^2 = 2(x - 1/2)^2 + 1/2$$

donc en posant $Y = y$ et $X = x + 1/2$ ce qui revient à faire une translation de $-1/2 \vec{i}$ du repère initial:

$$\left(\frac{Y}{\sqrt{2}/2}\right)^2 - \left(\frac{X}{1/2}\right)^2 = 1$$

C'est une hyperbole de centre $(x = -1/2, y = 0)$ et d'asymptotes $Y = \pm\sqrt{2}X$.

figure à la fin.

C φ est une application affine de déterminant 1 non nul. Le système $\phi(M) = M'$ est donc toujours de Cramer. Tout point M' du plan admet un unique antécédent, ϕ est bijective. Si on résout (par Pivot de Gauss

ou par déterminant) le système $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 1 \\ y' = 4x + 3y + 2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} x = 3x' - 2y' + 1 \\ y = -4x' + 3y' - 2 \end{cases}$. Ce qui donne donc la fonction réciproque de ϕ sur \mathbb{R}^2 .

D Soit $(x, y) \in \mathcal{P}$ si on calcule $(2x'^2 + 2x' + 1) - y'^2$ on a:

$$\begin{aligned} (2x'^2 + 2x' + 1) - y'^2 &= 2(3x + 2y + 1)^2 + 2(3x + 2y + 1) + 1 - (4x + 3y + 2)^2 = \\ (18x^2 + 8y^2 + 24xy + 12x + 4y + 1) + (6x + 4y + 2) + 1 - (16x^2 + 9y^2 + 24xy + 16x + 12y + 4) &= \\ 2x^2 - y^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

On a donc $(2x'^2 + 2x' + 1) - y'^2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + 2x + 1) - y^2 = 0$. Et donc $M \in C \Leftrightarrow M' \in C$

En prouvant l'égalité pour tout point du plan on évite la double inclusion.

D'après le calcul précédent pour montrer $\varphi(C_1) \subset C_1$ il suffit de montrer

$$(y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \text{ et } y \geq 0) \Rightarrow (y' \geq 0)$$

Or $y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = -1/2(1 \pm \sqrt{2y^2 - 1})$ car sur C_1 $y \geq \sqrt{2}/2$. Donc $y' = 4x + 3y + 2 = 3y \pm 2\sqrt{2y^2 - 1} - 3y + 2\sqrt{2y^2 - 1}$ est bien positive mais aussi $3y - 2\sqrt{2y^2 - 1}$ car $9y^2 \geq 8y^2 - 4$ et $3y \geq 0$

L'autre inclusion est symétrique le calcul de y en fonction de y' donnant aussi: $y = 3y' \pm 2\sqrt{2y'^2 - 1}$.

$$\boxed{\varphi(C_1) = C_1}$$

Remarque : on peut aussi utiliser le paramétrage d'une demi hyperbole $\left(t \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} X = \frac{1}{2} \text{sh}(t) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ch}(t) \end{cases}\right)$, soit

$\left(t \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{sh}(t) - \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ch}(t) \end{cases}\right)$ et on a alors $y' = 2 \text{sh}(t) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ch}(t) > 0$ et $y = -2 \text{sh}(t) + \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ch}(t) \geq 0$ car $\frac{3\sqrt{2}}{2} \geq 2 \geq 0$ et $\text{ch}(t) \geq \text{sh}(t) \geq 0$

E C'est une conséquence directe de $(u_n, v_n) \in C$ et $v_n \geq 0$.

F, G Sur C_1 y est positif et donc $y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ et donc $x' = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1$.

On étudie alors la fonction $g(x) = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1$ qui est bien C^∞ sur \mathbb{R} la quantité sous le radical étant strictement positive. De plus:

$$g'(x) = 3 + \frac{4x + 2}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

g est donc strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et donc g est bijective de $[u_n, u_{n+1}]$ sur $[g(u_n), g(u_{n+1})]$

Or $g(u_n) = 3u_n + 2\sqrt{2u_n^2 + 2u_n + 1} + 1 = 3u_n + 2v_n + 1$ (car on a un TPRI) $= u_{n+1}$ (d'après la formule matriciel du **III**)

Donc $[g(u_n), g(u_{n+1})] = [u_{n+1}, u_{n+2}]$. L'abscisse de M' est entre u_{n+1} et u_{n+2} donc $M' \in [M_{n+1}, M_{n+2}]$

$$\boxed{\varphi \text{ est bijective de } [M_n, M_{n+1}] \text{ sur } [M_{n+1}, M_{n+2}]}$$

H Soit (a, c) un TRPI. On peut voir que $|q| < |p|$ et $1 < |p|$ donc $u_n \sim \frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} p^n \rightarrow +\infty$; de plus $u_0 = 0$. Il existe donc un indice n tel que $u_n \leq a < u_{n+1}$. Le point (a, c) est donc sur $[M_n, M_{n+1}]$, $\varphi^{-n}(a, c) \in [M_0, M_1]$.

Or l'image par φ^{-1} d'un couple d'entiers est un couple d'entiers. Donc $\varphi^{-n}(a, c) = (\alpha, \beta)$ est un TRPI avec $\alpha \in \overline{[0, 3]}$. Le programme du I a vérifié que 0 et 3 étaient les seules solutions. Donc $(\alpha, \beta) = M_0$ ou M_1 . Donc $(a, b) = M_n$ ou M_{n+1} le second point étant exclu car $a < u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{Tout TRPI est un couple } (u_n, v_n)}$$

5. Et l'outil arithmétique

A calcul évident à partir de **R1**

B Si on pose $(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = x_n + y_n\sqrt{2}$ on a en développant:

$$x_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} 2^k, \quad y_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k+1} 2^k$$

En développant de même on vérifie : $(1 - \sqrt{2})^{2n+1} = x_n - y_n\sqrt{2}$. et donc comme $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -1$,
 $(x_n + y_n\sqrt{2})(x_n - y_n\sqrt{2}) = -1$ et donc $x_n^2 - 2y_n^2 = -1$.

$$\boxed{(x_n - 1)/2, y_n \text{ est un TRPI}}$$

Réciproquement on peut exprimer x_n et y_n en fonction de $(1 \pm \sqrt{2})$ et vérifier le lien avec les formules trouvées au **II** ou au **III**

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})^{2n+1} = x_n + y_n\sqrt{2} \\ (1 - \sqrt{2})^{2n+1} = x_n - y_n\sqrt{2} \end{cases}$$

On obtient par résolution de ce système:

$$\begin{cases} x_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} + (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2} \\ y_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2n+1} - (1-\sqrt{2})^{2n+1}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Or $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} = p$ et $(1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2} = q$ donc

$$\begin{cases} x_n = \frac{(1+\sqrt{2})p^n + (1-\sqrt{2})q^n}{2} = 2u_n + 1 = 2a_n + 1 \\ y_n = \frac{(1+\sqrt{2})p^n - (1-\sqrt{2})q^n}{2\sqrt{2}} = v_n = c_n \end{cases}$$