On considère un nombre réel strictement positif c et deux points F_1, F_2 dont la distance est égale à $2c$. On se propose dans ce problème d'étudier l'ensemble (L) des points M du plan tels que $MF_1.MF_2 = c^2$.

Dans toute la suite, on supposera le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$ choisi de manière telle que les points F_1, F_2 aient pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ et on pose pour tout nombre réel θ :

$$\vec{u}\,(\theta) = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j} \quad ; \quad \vec{v}\,(\theta) = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}\,.$$

PARTIE I : Étude et construction de l'ensemble (L)

1°)Équations cartésienne et polaire de (L)

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x, y)$ appartienne à (L).

b) En déduire, si on pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ avec $r \geq 0$, que M appartient à (L) si et seulement si $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ où θ désigne un nombre réel variant dans un domaine à préciser et a une constante qu'on exprimera en fonction de c.

Dans la suite de cette partie, on notera $M(\theta)$ le point de (L) défini par : $\overrightarrow{OM}(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\;\vec{u}\,(\theta)$.

2°) Étude et construction de (L)

a) Calculer le vecteur-dérivé à (L) au point $M(\theta)$ et en déduire l'expression des deux vecteurs unitaires tangent et normal $\vec{T}\,(\theta)$ et $\vec{N}\,(\theta)$ au point $M(\theta)$ dans les bases $(\vec{u}\,(\theta), \vec{v}\,(\theta))$, puis $(\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

b) Étudier les symétries de (L) et expliquer pour quelles raisons il suffit d'étudier (L) pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Donner des équations des tangentes à (L) aux points de paramètres $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$, $\theta = \pi/4$, puis représenter graphiquement la courbe (L).

c) Donner une mesure $\phi(\theta)$ de l'angle orienté $(\vec{i}\,,\,\vec{T}\,(\theta))$ et préciser la courbure à (L) au point $M(\theta)$. En quels points celle-ci est-elle maximale? minimale?

3°) Aire délimitée par (L) et longueur de (L)

a) Déterminer en fonction de a l'aire du domaine intérieur à la courbe (L).

b) Montrer que la longueur l de (L) est donnée par l'intégrale suivante :

$$l = 2a\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}\,.$$

4°) Étude de la courbe inverse de (L)

On appelle inversion de pôle O et de rapport a^2 la transformation du plan privé de O dans lui-même associant au point $M \neq O$ de coordonnées polaires $(r,\ \theta)$ le point M' de coordonnées polaires $(a^2/r,\ \theta)$. On note (L') l'ensemble-image de (L) par cette inversion, autrement dit l'ensemble des transformés M' des points M de (L) par cette inversion.

a) Déterminer les transformés F_1', F_2' des points F_1, F_2 par cette inversion, puis reconnaître et écrire l'équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que $|MF_1' - MF_2'| = 2a$.

b) Déterminer des équations polaire et cartésienne de (L'), puis reconnaître (L').

PARTIE II : Détermination de la longueur *l* de (L)

On considère dans cette partie les deux fonctions des variables réelles p, q définies par :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt \qquad ; \qquad \mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta))^{2p-1}(\sin(\theta))^{2q-1}d\theta.$$

1°) La fonction Gamma d'Euler

a) Pour quelles valeurs de p la fonction $t \longmapsto e^{-t}t^{p-1}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

b) Pour ces valeurs de p, exprimer $\Gamma(p+1)$ en fonction de p et $\Gamma(p)$.