Remarque 1 $C_n^p = \binom{n}{p}$

Remarque 2 : pour chaque somme avec ... précisez bien le terme général

CONCOURS TA A EPREUVES COMMUNES

ENS Cachan - ENSAIS B - ENSAIT - ENSIETA - ESEM - ESIM - ISEP - ITECH
CONCOURS COMMUN ENSAM - CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

MATHEMATIQUES 2

L'usage des calculatrices est interdit pendant cette épreuve.

Avertissement : Dans tout ce problème, n et p sont des entiers naturels non nuls. La fonction cotangente est désignée par cot.

Les parties IV et V sont indépendantes des parties I, II et III, **sauf pour la question IV.6).**

PARTIE I

I. Les formules de Newton.

Soit $P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré n.

Soient $z_1, \ z_2, \ldots \ , z_n$, ses racines complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.

On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} z_k^p$.

I.1. A l'aide des $P(z_i)$, $1 \le i \le n$, établir les relations :

- $a_n S_n + a_{n-1} S_{n-1} + \ldots + a_k S_k + \ldots + a_1 S_1 + n a_0 = 0$
- $a_n S_p + a_{n-1} S_{p-1} + \ldots + a_k S_{p-n+k} + \ldots + a_1 S_{p-n+1} + a_0 S_{p-n} = 0$ pour $p > n$.

I.2. Application : Pour $n = 2$, calculer S_1, S_2, S_3 en fonction de $a = a_2, b = a_1$ et $c = a_0$.

On admettra que pour $p \le n$, on a la relation similaire :

- $a_n S_p + a_{n-1} S_{p-1} + \ldots + a_{n-p+k} S_k + \ldots + a_{n-p+1} S_1 + a_{n-p} \cdot p = 0.$

PARTIE II

II. Calcul de $\sum_{k=1}^{n} \cot^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}$.

II.1. A partir de $\left(e^{ix}\right)^{2n+1}$ déterminer un polynôme P tel que pour tout réel x tel que $\sin x \ne 0$, on ait : $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P\left(\cot^2 x\right)$. Déterminer le degré de $P(X)$ ainsi que la valeur de son coefficient dominant.

II.2. Montrer que P possède n racines distinctes strictement positives.
Écrire la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

II.3. On pose $S_p = \sum_{k=1}^{n} \cot^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}$ et $S'_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^{2p} \frac{k\pi}{2n+1}}$.

Montrer que $S_1 = \frac{n(2n-1)}{3}$ et calculer S'_1.

II.4. En utilisant la relation admise dans la partie I, établir la relation de récurrence, pour $p \le n$:

$$C_{2n+1}^{1} S_p = C_{2n+1}^{3} S_{p-1} - C_{2n+1}^{5} S_{p-2} + \ldots + (-1)^p C_{2n+1}^{2p-1} S_1 + (-1)^{p+1} C_{2n+1}^{2p+1} \cdot p.$$

II.5. En déduire (par récurrence sur p) que la suite $\left(\dfrac{S_p}{n^{2p}}\right)_{n\geq 1}$ est convergente, et que sa limite α_p vérifie :

$$\alpha_p = \frac{2^2}{3!}\alpha_{p-1} - \frac{2^4}{5!}\alpha_{p-2} + \ldots + (-1)^p \frac{2^{2p-2}}{(2p-1)!}\alpha_1 + (-1)^{p+1}\frac{2^{2p}}{(2p+1)!}\cdot p.$$

Calculer α_1, α_2 et α_3.

II.6. En remarquant que $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^p = 1$, montrer que $S'_p = \sum_{k=1}^{p} C_p^k S_k + n$; en déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S'_p}{n^{2p}}$.

PARTIE III

III. Un premier calcul de $\zeta(2p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2p}}$

On pose $\zeta_n(2p) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{2p}}$.

III.1. Montrer que pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cot x \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sin x}$ et en déduire que

$$\frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} \frac{S_p}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2p}} \leq \zeta_n(2p) \leq \frac{\pi^{2p}}{2^{2p}} \frac{S'_p}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2p}}.$$

III.2. En déduire la valeur de $\zeta(2p) = \lim_{n\to+\infty} \zeta_n(2p)$ en fonction de α_p. Calculer $\zeta(2), \zeta(4)$ et $\zeta(6)$.