Exercice 2

R désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit α un réel strictement positif.

Pour n entier naturel non nul, on considère l'application u_n de $[0,+\infty[$ vers $\boldsymbol{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}.$$

1° Etude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.

a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

b) Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. {on calculera $\sup\{|u_n(x)|, x \in \mathbb{R}^+\}$}

c) Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.
Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a,b]$.

d) On suppose dans cette question que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour x élément de $[0,+\infty[$, on pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

i) Etablir l'inégalité : $R_n(x) \geq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$.

ii) En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,a]$ où a est un réel strictement positif. (i.e. $\sup_{[0,+\infty[} |R_n| \not\to 0$)

On note S l'application de $[0,+\infty[$ vers $\boldsymbol{R}$ définie par : $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2° Etude de la continuité de S.

a) Montrer que, pour tout α, S est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur $[0,+\infty[$.

c) On suppose que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

i) Soit f l'application définie sur $[1,+\infty[$ par : $t \mapsto f(t) = \dfrac{x}{t^{\alpha}(1+tx^2)}$. ~~Prouver que f est intégrable sur $[1,+\infty[$~~ . On note $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f(t)dt$ si cette limite existe

ii) Montrer que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq S(x)$.

iii) Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}dt$.

iv) En déduire que S n'est pas continue en 0.