

Après une première partie consacrée à l'étude de la projection sur les convexes fermés de \mathbb{R}^n on établira (dans \mathbb{R}^2) le théorème du point fixe de Brouwer et quelques unes de ses conséquences.

On suppose que \mathbb{R}^n est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $(\cdot | \cdot)$

et $\|\cdot\|$, donc si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont des éléments de \mathbb{R}^n on a : $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ et

$\|x\| = (x|x)^{1/2}$. Si X est une partie de \mathbb{R}^n on notera $\overset{\circ}{X}$ son intérieur, soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ on dira que $u \in X$ est un point fixe de f si $f(u) = u$; si $i \in \{1, \dots, n\}$, f_i désigne la composante de rang i de f , donc : $f(x) = (f_1(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x))$.

I. Projection sur un convexe fermé de \mathbb{R}^n

1. Démontrer que si $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a : $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ (inégalité de Schwarz). Montrer que

$|(x|y)| = \|x\| \|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires. Montrer que si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}^n$ vérifie :

$b \neq c$ et $\|a - b\| = \|a - c\|$, on a alors : $\left\| a - \frac{b+c}{2} \right\| < \|a - b\|$.

2. Soit F un fermé non vide de \mathbb{R}^n , soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $u \in F$ tel que : $\|x - u\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in F$ (on supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général).

3. Soit A un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n , montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $u \in A$ tel que $\|x - u\| \leq \|x - y\|$ pour tout $y \in A$.

Ceci établit le théorème de la projection sur les convexes de \mathbb{R}^n : soit A un convexe fermé non vide de \mathbb{R}^n , il existe une unique application, notée P , de \mathbb{R}^n dans A qui vérifie : $\|x - P(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in A\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. $P(x)$ s'appelle la projection de x sur A .

4. Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ tel que : $(x - \alpha | y - \alpha) \leq 0$ pour tout $y \in A$, on a : $\alpha = P(x)$

5. Supposons qu'il existe $y \in A$ tel que : $(x - P(x) | y - P(x)) > 0$. Soit alors $S: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $S(t) = \|(x - P(x)) - t(y - P(x))\|^2$. Montrer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que : $S(t) < \|x - P(x)\|^2$.

6. Dédurre de 4. et 5. que $u = P(x)$ si et seulement si : $u \in A$ et $(x - u | y - u) \leq 0$ pour tout $y \in A$.

7. Soit $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$ montrer que : $(x - y | P(x) - P(y)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2$. En déduire que P vérifie les propriétés suivantes : P est continue, $P(\mathbb{R}^n) = A$, $P(x) = x$ si $x \in A$.

La question 8 n'est pas à traiter

II. Théorème de Brouwer dans \mathbb{R}^2

Pour toute la suite du problème, on se place dans \mathbb{R}^2 ; si $r > 0$, $\bar{B}(O, r)$ désigne le disque fermé de centre O et de rayon r et $S(O, r)$ le cercle correspondant, on note $B = \bar{B}(O, 1)$ et $S = S(O, 1)$. On entend par application dérivable (ou C^1 ou C^2) de B (ou de $B \times \mathbb{R}$) dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}), la restriction à B (ou à $B \times \mathbb{R}$) d'une application dérivable (ou C^1 ou C^2) définie sur un ouvert de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3), contenant B (ou $B \times \mathbb{R}$), à valeurs dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}).

A. Cas particulier d'une application de classe C^2

Soit $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$, on suppose que f est de classe C^2 et que $f(B) \subset B$ et on se propose de montrer que f possède au moins un point fixe. On va raisonner par l'absurde et supposer que : $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$.

9. Montrer qu'il existe $\rho: B \rightarrow \mathbb{R}_+$, unique, telle que : $x + \rho(x)(x - f(x)) \in S$ pour tout $x \in B$.

Expliciter ρ , montrer qu'elle est de classe C^2 et que $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x \in S$. On

pose : $\alpha(x) = \rho(x)(x - f(x))$ et $\alpha_{ij}(x) = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i}(x)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ et $\varphi(x) = x + \alpha(x)$.

On note $A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(x) & \alpha_{12}(x) \\ \alpha_{21}(x) & \alpha_{22}(x) \end{pmatrix}$ et $\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$

10. Montrer que, pour tout $x \in B$, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}$ est non inversible

Indication : Montrez puis dériver la relation $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1$

11. Soit $\psi: B \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\psi(x, t) = \det(I_2 + tA(x))$

a) Montrer que : $\psi(x, t) = 1 + t\beta(x) + t^2\gamma(x)$ où β et γ sont des applications continues de B dans \mathbb{R} que l'on explicitera à l'aide des applications $(\alpha_{ij})_{(i,j) \in \{1,2\}^2}$. Vérifier que $\psi(x, 1) = 0$ pour tout $x \in B$.

b) Soit $J: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $J(t) = \iint_B \psi(x, t) dx_1 dx_2$. Justifier l'existence de J et calculer $J(0)$ et $J(1)$.

c) Montrer, grâce au théorème de Fubini que $\iint_B \beta(x) dx_1 dx_2 = 0$.

d) Soit $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 ,

soient $I_1(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x) dx_1 dx_2$, $I_2(g) = \iint_B \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(x) dx_1 dx_2$.

Montrer que :

$$I_1(g) = \int_{-1}^+ \left[g_1(\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-s^2}, s) - g_1(-\sqrt{1-s^2}, s) \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-s^2}, s) \right] ds - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) dx_1 dx_2$$

On obtient alors, de façon analogue :

$$I_2(g) = \int_{-1}^+ \left[g_1(s, \sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, \sqrt{1-s^2}) - g_1(s, -\sqrt{1-s^2}) \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(s, -\sqrt{1-s^2}) \right] ds - \iint_B g_1(x) \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x) dx_1 dx_2$$

Montrer que : $\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0$ et donc, que J est constante ; montrer que ceci est impossible.

On a ainsi démontré le théorème de Brouwer particulier : toute application de classe C^2 , de B dans B , a au moins un point fixe.

B. Forme générale du théorème de Brouwer

Admettre les questions 12, 13 et 14 qui généralisent le résultat précédent aux fonctions continues

14. Montrer que si $f: B \rightarrow B$ est continue, elle possède au moins un point fixe. Σ ADMIS/

15. Soit $r > 0$, soit $f: \overline{B}(0, r) \rightarrow \overline{B}(0, r)$, montrer que si f est continue elle possède au moins un point fixe (considérer $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = \frac{1}{r} f(rx)$).

16. Soit A un convexe fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 , soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, f continue telle que :
 $f(A) \subset A$.

a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $A \cup f(A) \subset \overline{B}(0, r)$.

b) On associe au convexe fermé non vide A la projection P , comme cela a été défini en question 3. Soit alors $h: \overline{B}(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x) = f(P(x))$. Dédire de l'étude de h que f possède au moins un point fixe dans A . On a donc le théorème de Brouwer général : si A est un convexe fermé borné non vide de \mathbb{R}^2 , et si $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue et vérifie : $f(A) \subset A$, alors f possède au moins un point fixe dans A .

III. Quelques conséquences du théorème de Brouwer

17. Soit $f: B \rightarrow S$, telle que : $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Montrer, en étudiant $(-f)$, que f ne peut être continue (ceci constitue le théorème de non rétraction).

18. Soit $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : f continue et $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Soit alors $y \notin f(B)$, montrer, en étudiant $g: B \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $g(x) = \frac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$, que $y \notin B$. En déduire que :
 $B \subset f(B)$.