

CONCOURS D'ENTREE A1 1995

Epreuve de MATHÉMATIQUES II

Durée 2 Heures

(Tous les candidats)

L'usage des calculatrices est interdit.

On s'attachera à la clarté des démonstrations ainsi qu'à leur rigueur.

On encadrera les différents résultats.

Notations :

$\mathbb{C}[x]$ représente l'algèbre des polynômes de la variable x à coefficients complexes.

$\mathbb{C}_2[x]$ représente l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Selon l'usage courant, on identifiera polynôme et fonction polynômiale.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ représente l'algèbre des matrices (3,3) à coefficients complexes.

$$I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I

1. Soit $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \in \mathbb{C}[x]$.

1.1 Pour tout polynôme g de $\mathbb{C}[x]$, montrer qu'il existe un et un seul couple de polynômes (q, f) de $\mathbb{C}[x]$ tel que

$$\begin{cases} g = P \times q + f \\ f \in \mathbb{C}_2[x] \end{cases}$$

1.2 Soit le paramètre complexe m , montrer que $\frac{P(x)-P(m)}{x-m}$ est un élément de $\mathbb{C}_2[x]$.

1.3 Soit une matrice fixée A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;

à tout polynôme $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, on fait correspondre la matrice $g(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$.

Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
 $g(x) \mapsto g(A)$

est un homomorphisme d'anneaux.

C'est à dire $\varphi(1) = I$

$$\forall (g_1, g_2) \in (\mathbb{C}[x])^2 \quad \varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1) + \varphi(g_2)$$

$$\varphi(g_1 \times g_2) = \varphi(g_1) \times \varphi(g_2)$$

II

2. On suppose dans toute cette partie que $P(x) = (x-a)^3$ (où $a \in \mathbb{C}$)

2.1 On note $f(x)$ un élément $\mathbb{C}_2[x]$, montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{P(x)} = f(a) \cdot \frac{\alpha}{(x-a)^3} + f'(a) \cdot \frac{\beta}{(x-a)^2} + f''(a) \cdot \frac{\gamma}{(x-a)}$$

où α, β, γ , sont trois complexes que l'on déterminera.

2.2 Soit $f(x) = \frac{P(x)-P(m)}{x-m}$, où m est un paramètre complexe. Montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{\alpha(m,a)}{(x-a)^3} + \frac{\beta(m,a)}{(x-a)^2} + \frac{\gamma(m,a)}{x-a}$$

où $\alpha(m, a)$, $\beta(m, a)$ et $\gamma(m, a)$ sont trois expressions simples que l'on déterminera.

2.3 Soit la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Calculer les valeurs propres de X ; est ce que X est diagonalisable?

Calculer $(X - I)^3$.

2.3.2 Pour quelles valeurs du paramètre m , la matrice $(X - m I)$ est-elle inversible?

Dans ce cas prouver l'égalité matricielle :

$$(X - m I)^{-1} = -\frac{\alpha(m,1)}{(m-1)^3} I - \frac{\beta(m,1)}{(m-1)^3} (X - I) - \frac{\gamma(m,1)}{(m-1)^3} (X - I)^2$$

III

3. On suppose dans toute cette partie que :

$$P(x) = (x - a)^2 (x - b) \quad (\text{où } a \text{ et } b \text{ sont des complexes distincts}).$$

3.1 On note $f(x)$ un élément de $\mathbb{C}_2[x]$, montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{\alpha_1 f(a)}{(x - a)^2} + \frac{\beta_1 f(a) + \beta_2 f'(a)}{x - a} + \frac{\gamma_1 f(b)}{x - b}$$

où $\alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$ sont des complexes à déterminer.

(Pour calculer β_1 et β_2 il peut être intéressant de dériver $\frac{f(x)}{x - b}$)

3.2 Soit $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x)}{P(x)} = q(x) + \frac{\alpha_1' \cdot g(a)}{(x - a)^2} + \frac{\beta_1' \cdot g(a) + \beta_2' \cdot g'(a)}{x - a} + \frac{\gamma_1' \cdot g(b)}{x - b}$$

où $\alpha_1', \beta_1', \beta_2', \gamma_1'$ sont des complexes à déterminer, et $q(x)$ est un polynôme que l'on ne cherchera pas à calculer.

3.3 Soit la matrice

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 9 \\ -4 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.3.1 Calculer les valeurs propres de X ; est-elle diagonalisable?

$$\text{Calculer } (X - I)^2 \times (X - 2I)$$

3.3.2 En exploitant les résultats précédents, exprimer X^{1995} comme combinaison linéaire de $X - 2I$, $(X - I) \times (X - 2I)$ et $(X - I)^2$.

3.4 Soit la matrice

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4.1 Vérifier que :

$$(X - I) \times X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $(X - mI)$ est-elle inversible? On prendra, dans la suite, m vérifiant cette condition.

3.4.3 Soit $P(x) = x^2 \times (x - 1)$ et $f(x) = \frac{P(x) - P(m)}{x - m}$

Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{P(x)}$
En déduire $(X - mI)^{-1}$ en fonction de $(X - I)$ et X .