Les calculatrices sont interdites

****

N.B.: Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté,
à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé,
il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition
en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

PARTIE I

On considère l'équation différentielle linéaire du 2° ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \qquad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

I.1. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathcal{E}_\lambda)$ et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$.
On supposera dans la suite du problème que $\lambda \geq -\frac{1}{2}$.

Dans la suite de cette partie, y désigne une fonction de la variable réelle x, admettant un développement en série entière $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.

I.2. Montrer que, pour que y soit solution de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

Tournez la page SVP

I.3.

I.3.1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ pour que l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d \in \mathbb{N}$?

I.3.2. Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathcal{E}_\lambda)$ de degré d, que nous noterons φ_d, telle que $\varphi_d(0) = 1$.

I.3.3. Expliciter la fonction polynôme φ_1.

I.3.4. Déterminer les coefficients a, b, c, a', b', c' tels que :

$$\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}, \qquad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{(2x+1)^2}.$$

En déduire la solution générale de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

I.4. On se place dans le cas où $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{N}$.

I.4.1. On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathcal{E}_\lambda)$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

I.4.2. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$, que nous noterons φ_λ, développable en série entière de la variable x sur $]-1, +1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0) = 1$.

I.4.3. Expliciter les développements en série entière de la variable x des fonctions $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

PARTIE II

Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x\sin^2 t}\, dt.$$

II.1. Montrer que ψ est définie et continue sur $[-1, +\infty[$.

II.2. Montrer que ψ est indéfiniment dérivable sur $]-1, +\infty[$.

II.3.

II.3.1. Montrer que pour tout $u \in]-1,+1[$ on a $\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n$.

II.3.2. Montrer que ψ est développable en série entière de la variable x sur $]-1,+1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]-1,+1[, \qquad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt \right) x^n.$$

II.3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, dt$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.
Calculer I_0.
En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que le développement de ψ en série entière de la variable x sur $]-1,+1[$.

II.3.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq 1$.

II.3.5. Montrer que le développement de ψ en série entière est intégrable terme à terme sur $]-1,+1[$, et en déduire que :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(x) \, dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2.$$

II.4. Déduire du développement de ψ en série entière une expression de $\psi(x)$ en fonction de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)$ pour tout $x \in]-1,+1[$.

II.5. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère l'ellipse $\mathcal{C}$ paramétrée par $t \in [0, 2\pi] \longmapsto b \cos t . \vec{\imath} + a \sin t . \vec{\jmath}$, où a et b sont des nombres réels donnés tels que $a \geq b > 0$. On note ℓ sa longueur et e son excentricité.
Montrer que $\ell = \pi a \left[\varphi_{\frac{1}{2}}(-e^2) + \varphi_{-\frac{1}{2}}(-e^2) \right]$.

PARTIE III

Soit f la fonction de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + x \sin^2 t} \, dx.$$

Tournez la page SVP

III.1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et 2π-périodique.

III.2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III.3. Montrer que la série de Fourier de f est de la forme :

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{2n} \cos 2nt,$$

où α_0, α_2, $\ldots \alpha_{2n}$, $\ldots$ sont des nombres réels que l'on ne cherchera pas à calculer.
Préciser pourquoi la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier.

III.4. A l'aide du résultat de la question II.3.5, donner une expression de α_0 sous forme de somme d'une série numérique.

Fin de l'énoncé