1. Préambule

Dans tout le problème, on appelle **triangle rectangle presque-isocèle** (en abrégé TRPI) tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs des entiers de la forme a, $a+1$, c (c est la longueur de l'hypoténuse).
On admet qu'il existe une infinité de TRPI (ce résultat sera démontré au II.C) et on classe les TRPI dans l'ordre croissant des valeurs de a.
Ainsi, le triangle de côtés $a = 3$, $a+1 = 4$, $c = 5$ est le plus petit TRPI.
On définit les deux réels :

$$p = (3 + 2\sqrt{2})\ ,\ q = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)$$

I.A) Si a et c sont des entiers naturels non nuls, montrer qu'ils définissent un TRPI si et seulement s'ils vérifient la relation

$$\textbf{(R1)}\ \ :\ \ 2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0$$

.Le but du problème est la détermination des TRPI.
On note a_n et c_n les longueurs du plus petit côté et de l'hypoténuse du n^{eme} TRPI et on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_1 = 3$ et $c_1 = 5$.
Comme $a = 0$ et $c = 1$ vérifient la relation (R1), on pose $a_0 = 0$ et $c_0 = 1$.
Les termes a_n et c_n sont alors définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.
I.B) Ecrire un programme permettant de déterminer les valeurs successives de a_n et c_n (le candidat peut utiliser, en l'indiquant, le langage informatique de son choix)
I.C) Déterminer, en utilisant votre machine à calculer, les valeurs de a_n et c_n pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

2. Les suites

II.A)

- Montrer que pour $n = 1, 2$ les termes c_n vérifient une relation de la forme

$$\textbf{(R2)}\ \ :\ \ c_{n+1} + \beta c_n + \lambda c_{n-1} = 0$$

- Déterminer β et λ.
  On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = c_0$, $v_1 = c_1$ et pour

$$n \geq 1, v_{n+1} + \beta v_n + \lambda v_{n-1} = 0$$

  (β et λ sont les valeurs calculées ci-dessus).

- Montrer que, pour tout n, $v_n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer v_n en fonction de n.(le résultat ferra apparaître p et q)

II.B)

- Montrer que pour $n = 1, 2$, les termes a_n vérifient une relation de la forme :

$$\textbf{(R3)}\ \ :\ \ a_{n+1} + \beta a_n + \lambda a_{n-1} = b$$

  β et λ sont les coefficients calculés en II.A et où b est déterminer.
  On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$ et pour

$$n \geq 1, u_{n+1} + \beta u_n + \lambda u_{n-1} = b.$$

- Montrer que, pour tout n, $u_n \in \mathbb{N}$.
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \dfrac{1}{2}$. Déterminer w_n, puis u_n en fonction de n.(le résultat ferra apparaître p et q)

II.C) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, u_n et v_n sont les longueurs du petit côté et de l'hypoténuse d'un TRPI.

3. L'algèbre linéaire

Dans toute la suite du problème, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles définies dans les questions II.B et II.A.
Dans cette partie on va **retrouver** avec des outils algébriques les expressions de u_n et v_n déterminée dans la partir **II**
III.A)
III.A.1) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient le système :

$$\textbf{(S)} \quad : \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} &= 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}$$

III.A.2) En notant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},$$

écrire le système (S) sous la forme matricielle :

$$X_{n+1} = AX_n + B$$

$A \in M_2(\mathbb{R})$, $B \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, en précisant A et B.
III.B)
III.B.1) Montrer que $A - I$ est inversible, I désignant la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. Calculer $(A-I)^{-1}$.
III**.B.2)** Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Calculer $(A-I)S_n$. En déduire S_n en fonction de $(A-I), I$ et A^n.
III**.B.3)** Exprimer X_n en fonction de A^n, S_n, B et X_0 , puis en fonction de $A^n, (A-I), B$ et X_0
III.C)
III.C.1) Montrer qu'il existe deux réels u et v tels que $A^2 = uA + vI$
III.C.2) Soit $P = X^2 - uX - v$
Déterminer les racines de P.
Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer le reste de la division euclidienne de X^n par P.
III.C.3) En déduire A^n puis X^n en fonction de n . Retrouver les expressions de u_n et v_n déterminées en **II**

4. Un peu de géométrie

L'objectif de cette partie est de montrer que les couples (u_n, v_n) définissent des TRPI et que ce sont les seuls couples d'entiers ayant cette propriété. On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
IV.A) Montrer que la recherche des TRPI équivaut recherche des points coordonnées dans $\mathbb{N}$ sur la conique C d'équation : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
IV.B) Préciser la nature de cette conique. En tracer un graphe soigné dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
IV.C) On considère l'application φ du plan dans lui-même, qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ défini par : $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$. Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.
IV.D) Montrer que $\varphi(C) = C$.
On notera C_1 la partie de C constituée des points de C d'ordonnée positive. Montrer que $\varphi(C_1) = C_1$.
IV.E) Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par M_n le point de coordonnées (u_n, v_n) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$\overrightarrow{OM_n} = u_n \overrightarrow{i} + v_n \overrightarrow{j}.$$

Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_n \in C_1$.
IV.F) On note $[M_n, M_{n+1}]$ l'ensemble des points de C_1 dont l'abscisse x appartient au segment $[u_n, u_{n+1}]$.
Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi([M_n, M_{n+1}]) \subset [M_{n+1}, M_{n+2}]$.
IV.G) Déterminer l'ensemble des points M de C_1 tels que $\varphi(M)$ a une abscisse positive. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\varphi([M_n, M_{n+1}]) = [M_{n+1}, M_{n+2}]$.
IV.H) En considérant deux entiers a et c définissant un TRPI, conclure.

5. Et l'outil arithmétique

V.A) Montrer que les deux entiers naturels a et c définissent un TRPI si et seulement si : $(2a+1)^2 - 2c^2 = -1$.
V.B) En déduire que $(2a_n + 1)$ et c_n sont, pour $n \geq 1$, respectivement les coefficients de 1 et de $\sqrt{2}$ dans le développement de $(1+\sqrt{2})^{2n+1}$.
Ce procédé est exactement celui utilisé par Bhaskâkâ pour traiter l'équation plus générale : $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.