ICARE 98

Option TSI/ATS

Math 1

1. PARTIE

1. quelque soit la valeur de k les fonctions $f_{n,k} : x \to \frac{1}{(x \pm n)^k}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

   1. Pour $k \geq 2$ on a $\left|\frac{1}{(x\pm n)^k}\right| \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k}$ ce qui assure la convergence absolue des séries $\sum \frac{1}{(x\pm n)^k}$ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ par comparaison d'une série à terme positif à une série de Riemann convergente.
   pour $k = 1$ On a $x + n > 0$ pour $n > 1 + E(-x)$. La série $\sum \frac{1}{x+n}$ est donc à termes positifs à partir d'un certain rang .De plus $\frac{1}{x+n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ ce qui assure la divergence de la série $\sum \frac{1}{x+n}$. même chose pour $\sum \frac{1}{x-n}$ avec une série à termes négatifs à partir d'un certain rang.

   $$\boxed{\sum \frac{1}{(x\pm n)^k} \text{ converge si et seulement si } k > 1}$$

   2. On a $\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{(x+n)(x-n)}$ donc $\left|\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right| \sim \frac{2|x|}{n^2}$ ce qui assure la convergence absolue de la série sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

   $$\boxed{\sum \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \text{ converge}}$$

2. On peut remarquer que pour $k \geq 2$ on a aussi $E_k = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k}$

   1. On a $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)^k} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x-n)^k} = \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{(x+m)^k} + \sum_{m=-N}^{-1} \frac{1}{(x+m)^k}$, par changement d'indice. Le terme $\frac{1}{x^k}$ correspond à la valeur $m = 0$. On a donc $\frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k} = \sum_{m=-N}^{N} \frac{1}{(x+m)^k}$.
   Par convergence des sommes partielles vers la somme de la série on a bien

   $$\boxed{E_k(x) = \lim_{N\to+\infty} \left(\sum_{m=-N}^{N} \frac{1}{(x+m)^k}\right)}$$

   2. On a $\sum_{m=-N}^{N} \frac{1}{(x+1+m)^k} = \sum_{m=1-N}^{1+N} \frac{1}{(x+m)^k} = \sum_{m=1-N}^{N-1} \frac{1}{(x+m)^k} + \frac{1}{(x+N)^k} + \frac{1}{(x+N+1)^k}$. Si on fait tendre N vers $+\infty$ on obtient :

   $$\boxed{E_k(x+1) = E_k(x)}$$

   3. Si k est pair on a $\frac{1}{(-x)^k} = \frac{1}{x^k}$ et $\frac{1}{(-x+n)^k} + \frac{1}{(-x-n)^k} = \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k}$. En sommant les égalités $E_k(-x) = E_k(x)$ et E_k est paire.
   De même si k est impair E_k est impair.

2. PARTIE

1. Soit $f_n : x-> \frac{1}{(x+n)^k} + \frac{1}{(x-n)^k}$. Les fonctions f_n sont C^1 sur tout intervalle du type $I =]p, p+1[$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Sur un tel intervalle la série $\sum f_n$ converge simplement . De plus $f_n'(x) = -k\left(\frac{1}{(x+n)^{k+1}} + \frac{1}{(x-n)^{k+1}}\right)$. Pour n assez grand $(x+n)$ et $(n-x)$ sont positifs sur I et $|f_n'(x)| \leq k\left(\frac{1}{(n+p)^{k+1}} + \frac{1}{(n-p-1)^{k+1}}\right) = v_n$. La suite v_n est indépendante de x et la série $\sum v_n$ converge car $v_n \sim \frac{2k}{n^{k+1}}$ série de Riemann convergente $(1+k > 1)$.La série $\sum f_k'$ converge normalement , donc uniformément sur I
   La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est donc C^1 sur I et on peut en calculer la dérivée par dérivation sous le signe $\sum$. Comme $\frac{1}{x^k}$ est C^1 sur I ,E_k est C^1 sur I et $E_k'(x) = -kE_{k+1}$

2. Récurrence immédiate :E_1 est C^{k-1} sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et $E_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$

   - La propriété est vraie si $k = 1$
   - Si on suppose $E_k = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}$ alors comme $E_1^{(k-1)}$ est C^1 sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ donc E_1 y est C^k et :

   $$E_{k+1} = -\frac{E_k'}{k} = -\frac{1}{k}\left(\frac{(-1)^k}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}\right)' = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} E_1^{(k)}$$

   - Comme E_1 est C^∞ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, E_k y est aussi C^∞

3. Ce sont des développement de Taylor Young à l'ordre 2 en x (possible les fonctions étant au moins C^2) dans les quels on remplace les dérivées en utilisant : $E_k'(x) = -kE_{k+1}$ et $E_k''(x) = k(k+1)E_{k+2}$

$$\begin{aligned} E_1(x+h) &= E_1(x) + hE_1'(x) + \frac{h^2}{2}E"_1(x) + h^2\varepsilon_1(x) \\ &= E_1(x) - hE_2(x) + h^2E_3(x) + h^2\varepsilon_1(x) \end{aligned}$$

de même pour les deux autres formules.

3. PARTIE

1. On a une série de Riemann avec $2s > 1$ .D'où la convergence de la série.
2. Pour $x \in]-1,1[$ on a $\frac{x}{n} \in]-1,1[$ ce qui assure la convergence de la série .

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} = \frac{1}{1-\frac{x}{n}} = n\frac{1}{n-x}$$

donc $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{k+1}} = \frac{1}{n-x}$. En substituant $-x$ à x : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n^{k+1}} = \frac{1}{n+x}$.
Remarque 5/2 : le sujet initiale fait le même calcul en parlant de série entière.

3. Par commutativité admise des sommes on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(x-n)} + \frac{1}{(x+n)}\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s}}x^{2s-1}\right) = -\sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2s}}x^{2s-1}\right) = -\sum_{s=1}^{\infty}\gamma_{2s}x^{2s-1}$$

pour $x \neq 0$ on peut ajouter $\frac{1}{x}$ à l'égalité précédente :

$$\boxed{E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{2s}x^{2s-1}}$$

4. Pour calculer $E_k(x)$ on va dériver $k-1$ fois la relation précédente en utilisant :

$$\left(x^{2s-1}\right)^{(k-1)} = \begin{cases} 0 \text{ si } k > 2s \\ (2s-1)! \text{ si } k = 2s \\ \frac{(2s-1)!}{(2s-k)!}x^{2s-k} \text{ si } k < 2s \end{cases}$$

Ce qui donne $\left(x^{2s-1}\right)^{(k-1)}.\frac{1}{(k-1)!} = C_{2s-1}^{k-1}x^{2s-k}$ avec les notations du sujet.

$$E_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}E_1^{(k-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} - (k-1)!\sum_{s=1}^{\infty}C_{2s-1}^{k-1}\gamma_{2s}x^{2s-k}\right)$$

$$\boxed{E_k(x) = \frac{1}{x^k} + (-1)^k\sum_{s=1}^{\infty}C_{2s-1}^{k-1}\gamma_{2s}x^{2s-k}}$$

4. PARTIE

1. 1. La fraction ayant un degré strictement négatif on peut écrire :

$$\frac{1}{x^2(x-a)^2} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{(x-a)^2} + \frac{\delta}{(x-a)}$$

En multipliant par x^2 et en faisant tendre x vers a on a $a = \frac{1}{a^2}$. De même (ou par symétrie par rapport à $x = a/2$) on a $\gamma = \frac{1}{a^2}$. Si on multiplie par x et si on fait tendre x vers $+\infty$ on a $\beta + \delta = 0$. La valeur en un point $x = a/2$ par exemple donne alors $\beta = -\delta = \frac{2}{a^3}$

$$\boxed{\frac{1}{x^2(x-a)^2} = \frac{1/a^2}{x^2} + \frac{2/a^3}{x} + \frac{1/a^2}{(x-a)^2} - \frac{2/a^3}{(x-a)}}$$

   2. On prend $p = x$ et $q = a - x$ dans la relation précédente . On a alors $r = p + q = a$

$$\boxed{(p+q=r) \Rightarrow \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{r^3}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}$$

2. On a en prenant $p = x+n, q = h+m-n, r = p+q = x+h+m$

$$\frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} = \frac{1}{(x+h+m)^2}\left(\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(h+m-n)^2}\right) + \frac{2}{(x+h+m)^3}\left(\frac{1}{(x+n)} + \frac{1}{(h+m-n)}\right)$$

De même avec $p = x-n, q = h+m+n, r = p+q = x+h+m$

$$\frac{1}{(x-n)^2(h+m+n)^2} = \frac{1}{(x+h+m)^2}\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(h+m+n)^2}\right) + \frac{2}{(x+h+m)^3}\left(\frac{1}{(x-n)} + \frac{1}{(h+m+n)}\right)$$

Donc pour $n > 0$

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} + \frac{1}{(x-n)^2(h+m+n)^2} = \\ \frac{1}{(x+h+m)^2}\left(\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(h+m-n)^2} + \frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(h+m+n)^2}\right) + \\ \frac{2}{(x+h+m)^3}\left(\frac{1}{(x+n)} + \frac{1}{(h+m-n)} + \frac{1}{(x-n)} + \frac{1}{(h+m+n)}\right) \end{array}\right.$$

et pour $n = 0$:

$$(2) : \frac{1}{(x)^2(h+m)^2} = \frac{1}{(x+h+m)^2}\left(\frac{1}{(x)^2} + \frac{1}{(h+m)^2}\right) + \frac{2}{(x+h+m)^3}\left(\frac{1}{(x)} + \frac{1}{(h+m)}\right)$$

On ajoute les lignes (1) pour n variant de 1 à N et la ligne 2.

$$S_{M,N}(x,h) = \sum_{m=-M}^{M}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{(x+h+m)^2}\sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{(x+n)^2} + \frac{1}{(h+m+n)^2}\right) + \\ \frac{2}{(x+h+m)^3}\sum_{n=-N}^{N}\left(\frac{1}{(x+n)} + \frac{1}{(h+m+n)}\right) \end{array}\right]$$

On fait tendre n vers $+\infty$ et comme la somme sur a un nombre fini de termes

$$\lim_{n\to+\infty}(S_{M,N}(x,h)) = \sum_{m=-M}^{M}\left[\begin{array}{c} \frac{1}{(x+h+m)^2}(E_2(x) + E_2(h+m)) + \\ \frac{2}{(x+h+m)^3}(E_1(x) + E_1(h+m) \end{array}\right]$$

Si maintenant M tend vers $+\infty$:

$$\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{(x+h+m)^2}E_2(x) = E_2(x)\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{(x+h+m)^2} \to E_2(x)E_2(x+h)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=-M}^{M}\frac{E_2(h+m)}{(x+h+m)^2} &= \sum_{m=-M}^{M}\frac{E_2(h)}{(x+h+m)^2}\text{àà cause de la période 1 de } E_2 \\ &= E_2(h)\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{(x+h+m)^2} \to E_2(h)E_2(x+h) \end{aligned}$$

Et de même dans l'autre terme:

$$\lim_{M\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}(S_{M,N}(x))\right) = E_2(x+h)(E_2(x) + E_2(h)) + 2E_3(x+h)(E_1(x) + E_1(h))$$

Intervertissons les limites (admis) :

$$\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} = \frac{1}{(x+n)^2}\sum_{m=-M}^{M}\frac{1}{(h-n+m)^2} \to \frac{E_2(h-n)}{(x+n)^2} = \frac{E_2(h)}{(x+n)^2}\ \text{(période)}$$

Donc

$$\lim_{N\to\infty}\left(\lim_{M\to\infty}(S_{M,N}(x))\right) = E_2(h)E_2(x)$$

Les deux limites sont égales :

$$\boxed{E_2(h)E_2(x) = E_2(x+h)(E_2(x) + E_2(h)) + 2E_3(x+h)(E_1(x) + E_1(h))}$$

5. PARTIE

1. $y^2+\pi^2$ ne prenant pas la valeur zéro on a
$$\frac{y'}{y^2-\pi^2}=-1$$
Soit en intégrant par rapport à x
$$\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{\pi}\right)=Cste-x$$
Le membre de gauche est compris entre -1/2 et 1/2 (stricte) . On doit donc prendre $Cste=a$ pour que le membre de droite soit toujours compris entre -1/2 et 1/2 .
$$\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{y}{\pi}\right)=a-x$$
$$\boxed{y(x)=\pi\tan\left(\pi(a-x)\right)}$$

2. Un beau développement asymptotique à l'ordre 0:
$$E_2(x)E_2(h)=E_2(x)\left(\frac{1}{h^2}+\gamma_2+o(1)\right)$$
$$\begin{aligned}E_2(x+h)\left(E_2(x)+E_2(h)\right) &= \left(E_2(x)-2E_3(x)h+3E_4(x)h^2+o(h^2)\right)\left(\frac{1}{h^2}+E_2(x)+\gamma_2+o(h)\right)\\ &= \frac{E_2(x)}{h^2}-2\frac{E_3(x)}{h}+\left(3E_4(x)+E_2(x)^2+E_2(x)\gamma_2\right)+o(1)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}2E_3(x+h)\left(E_1(x)+E_1(h)\right) &= 2\left(E_3(x)-3hE_4(x)+o(h)\right)\left(\frac{1}{h}+E_1(x)-\gamma_2 h+o(h)\right)\\ &= 2\frac{E_3(x)}{h}+\left(2E_3(x)E_1(x)-6E_4(x)\right)+o(1)\end{aligned}$$
Si on reporte alors dans (3) les termes en $\frac{1}{h^2}$ et $\frac{1}{h}$ se simplifient et il reste en faisant tendre h vers 0
$$\gamma_2E_2(x)=(3-6)E_4(x)+E_2(x)^2+\gamma_2E_2(x)+2E_1(x)E_3(x)$$
Soit :
$$\boxed{3E_4(x)=E_2(x)^2+2E_1(x)E_3(x)}$$
La relation est vraie sur $]0,1[$ donc par période sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.

3. On élimine E_4 entre (4) et (5)
$$3E_4=E_2^2+2E_1E_3=3E_2^2-6\gamma_2E_2$$
d'où (6). On dérive maintenant cette relation :
$$2\left(E_1'E_3+E_1E_3'\right)=4E_2E_2'-6\gamma_2E_2'$$
Soit avec la relation $E_k'=-kE_{k+1}$
$$-2E_2E_3-6E_1E_4=-8E_2E_3-12\gamma_2E_3$$
On obtient alors (7) par changement de membre et division par 6.

   Si on élimine $\gamma_2E_2E_3$ entre (5)E_3 et (7)E_2 on a $(E_4)\left(E_3-E_1E_2\right)=0$ .Donc pour tout point x telle que $E_4(x)\neq 0$ on a $E_3(x)=E_1(x)E_2(x)$.

   Or E_4 est une somme de nombres positifs non tous nuls . Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $E_4(x)\neq 0$

   Donc (8) est vrai

   Pour avoir (9) on substitue la valeur de E_3 que l'on vient de trouver dans (6) et on simplifie par E_2 toujours strictement positif.

4. On sait que $E_2=-E_1'$ d'où la relation voulue.

5. On a donc d'après V1 avec $a=1/2$: $E_1(x)=y(x)=\pi\tan\left(\pi/2-\pi x\right))=\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)$
$$\boxed{E_1(x)=\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)}$$
Par période la relation est vraie sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$.