390 M

On se propose de définir, au moyen de sommes de séries, une famille de fonctions E_k ($k \in \mathbf{N}$) de période 1, puis de reconnaître en E_1 une fonction trigonométrique classique.
Les parties II, III, IV et V utilisent la définition des E_k donnée dans la partie I ; elles peuvent être abordées de façon indépendante, les résultats nécessaires étant explicités chaque fois qu'il en est besoin.

ICARE 98 TSI
Rad 1

Partie I . Définition des fonctions E_k ($k \in \mathbf{N}^*$)

1. Soit $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$.

1.1. Etablir, suivant la valeur de $k \in \mathbf{N}^*$, la nature des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k}$.

1.2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right)$?

2. On définit, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, une application $E_k : \mathbf{R} - \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ par :

$$E_1(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right),$$

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^k} \quad \text{si } k \geq 2.$$

2.1. Montrer que l'on peut écrire, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$,

$$E_k(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n)^k}.$$

2.2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, E_k admet 1 pour période.

2.3. Etudier, suivant la valeur de $k \in \mathbf{N}^*$, la parité de E_k.

Partie II . Dérivabilité et étude locale des fonctions E_k

1. ~~On admettra~~ Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la dérivée de E_k peut être obtenue en dérivant terme à terme par rapport à x sur $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$ les séries définissant E_k dans la question **I.2.** ; ~~montrer que~~ et que

$$(1) \qquad E_k' = -k E_{k+1}.$$

2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, E_k est de classe C^∞ et

$$E_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} E_1^{(k-1)}.$$

3. Soit $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$; établir les développements limités suivants :

$$E_1(x+h) = E_1(x) - E_2(x)h + E_3(x)h^2 + h^2\varepsilon_1(h)$$
$$E_2(x+h) = E_2(x) - 2E_3(x)h + 3E_4(x)h^2 + h^2\varepsilon_2(h)$$
$$E_3(x+h) = E_3(x) - 3E_4(x)h + 6E_5(x)h^2 + h^2\varepsilon_3(h)$$

où l'application ε_k, définie au voisinage de 0, est telle que $\lim_{x \to 0} \varepsilon_k(x) = 0$ pour $k = 1, 2, 3$.

Partie III . Développement de E_1 en série de puissances

1. Soit $s \in \mathbf{N}^*$; montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}}$ est convergente ; on note γ_{2s} sa somme.

2) Montrer que pour $x \in]-1,1[$ la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{n^{k+1}}$ converge et calculer sa somme

Etablir que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}.$$

3. Montrer que, pour tout $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \sum_{s=1}^{+\infty} \gamma_{2s} x^{2s-1}$$

(on admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1} = \sum_{s=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^{2s}} x^{2s-1}$).

4. En s'appuyant sur la relation donnée dans la question **II.2.**, démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]-1,0[\cup]0,1[$,

$$E_k(x) = \frac{1}{x^k} + (-1)^k \sum_{s=1}^{+\infty} C_{2s-1}^{k-1}\, \gamma_{2s} x^{2s-k} \quad ,$$

où on convient que $C_{2s-1}^{k-1} = 0$ si $k > 2s$.

Ceci permet d'écrire, en particulier,

$$E_1(x) = \frac{1}{x} - \gamma_2 x + x\delta_1(x)$$

$$E_2(x) = \frac{1}{x^2} + \gamma_2 + x\delta_2(x)$$

$$E_3(x) = \frac{1}{x^3} - 3\gamma_4 x + x\delta_3(x)$$

où, pour $k = 1, 2, 3$, l'application $\delta_k :]-1,0[\cup]0,1[\to \mathbf{R}$ est telle que $\lim_{x\to 0} \delta_k(x) = 0$.

Partie IV. Une formule d'addition liant E_1, E_2, E_3

1. Soient $p, q, r \in \mathbf{R}^*$ tels que $r = p + q$.

 1.1. Soit $a \in \mathbf{R}^*$; décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^2(a-X)^2}$.

 1.2. En déduire la relation

$$(2) \qquad \frac{1}{p^2q^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}\right) + \frac{2}{r^3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) .$$

2. Soient $x, h \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$ tels que $x + h \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$. On pose, pour $M, N \in \mathbf{N}$,

$$S_{M,N}(x,h) = \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(x+n)^2(h+m-n)^2} .$$

 2.1. En utilisant la relation (2), montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} S_{M,N}(x,h) = \sum_{m=-M}^{M} \frac{1}{(x+h+m)^2}[E_2(x) + E_2(h+m)] + \sum_{m=-M}^{M} \frac{2}{(x+h+m)^3}[E_1(x) + E_1(h+m$$

 2.2. On admet que

$$\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty} S_{M,N}(x,h)\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\lim_{M\to+\infty} S_{M,N}(x,h)\right) ;$$

 en déduire la relation

$$(3) \qquad E_2(x)E_2(h) = E_2(x+h)[E_2(x) + E_2(h)] + 2E_3(x+h)[E_1(x) + E_1(h)] .$$

Partie V. Une équation différentielle vérifiée par E_1

[redacted] Montrer

1. [redacted]r que, pour tout $a \in \mathbf{R}$, l'équation différentielle
$$y' + y^2 + \pi^2 = 0$$
admet sur l'intervalle $]a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}[$ une unique solution, que l'on explicitera.

2. Soit $x \in]0,1[$, et $h \in]0,1[$ tel que $x + h \in]0,1[$; en regardant les deux membres de la relation (3) de la question **IV.2.2.** comme des fonctions de h, et en utilisant les développements donnés dans les questions **II.3.** et **III.4.**, établir la relation
$$3E_4(x) = E_2^2(x) + 2E_1(x)E_3(x)$$
et en déduire la relation
$$(4) \qquad 3E_4 = E_2^2 + 2E_1E_3 \;.$$

3. On admet la relation
$$(5) \qquad E_2^2 = E_4 + 2\gamma_2 E_2 \;,$$
où γ_2 est défini au **III.1.** (elle s'établit de façon analogue à la précédente).
Déduire de (4) et (5) les relations suivantes :
$$(6) \qquad E_1E_3 = E_2^2 - 3\gamma_2 E_2$$
$$(7) \qquad E_2E_3 - 2\gamma_2 E_3 = E_1E_4 \qquad \text{(utiliser (1))}$$
$$(8) \qquad E_3 = E_1E_2 \qquad \text{(utiliser (5) et (7))}$$
$$(9) \qquad E_1^2 = E_2 - 3\gamma_2 \qquad \text{(utiliser (6) et (8)).}$$

4. Déduire de la question précédente que la restriction de E_1 à $]0,1[$ est solution de l'équation différentielle
$$y' + y^2 + 3\gamma_2 = 0 \;.$$

5. On admettra que $\gamma_2 = \dfrac{\pi^2}{3}$; en déduire que, pour tout $x \in]0,1[$,
$$E_1(x) = \pi \cot(\pi x) \;,$$
où cot désigne la fonction cotangente.
Cette égalité reste-t-elle vraie pour $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$?