ENSAIT 1994 Math 1

épreuve de 2 heures

1.1.1) La matrice a le coefficient $a_{i,k}$ ligne i colonne k si $i<k$ et le coefficient 0 si $i \geq k$.
C'est une matrice triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale:

$$\text{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2)

- $f(e_1)=0$ donc $f\circ f(e_1)=0$
- $f(e_2)=a_{1,2}e_1$, donc $f\circ f(e_2)=a_{1,2}f(e_1)=0$

1.1.3)
calcul vectoriel de $f\circ f\,(e_k)$: On a :

$$f(e_k)=\sum_{j=1}^{k-1} a_{j,k}e_j$$

et donc

$$f\circ f\,(e_k)=\sum_{j=1}^{k-1} a_{j,k}f\,(e_j)=\sum_{j=1}^{k-1} a_{j,k}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}e_i=\sum_{1\leq i<j<k} a_{i,j}a_{j,k}e_i$$

Ce qui impose $i\leq k-2$ et pour $i\leq k-2$, j varie de $i+1$ à $k-1$

$$\boxed{f\circ f\,(e_k)=\sum_{i=1}^{k-2}\left(\sum_{j=i+1}^{k-1} a_{i,j}a_{j,k}\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{k\in [\![3..n]\!] \Rightarrow f\circ f\,(e_k)\in V_{k-2}}$$

1.1.4) Il suffit de traduire matriciellement la formule précédente :

$$b_{i,k}=\begin{cases} 0 \text{ si } i>k-2 \\ \sum_{j=i+1}^{k-1} a_{i,j}a_{j,k} \text{ si } i\leq k-2 \end{cases}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,2}a_{2,3} & \cdots & \sum_{j=2}^{n-1} a_{i,j}a_{j,k} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-2,n-1}a_{n-1,n} \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mais le sujet dit clairement que pour <u>rédiger</u> une matrice $n\times n$ il ne suffit pas de la dessiner , il faut écrire explicitement la formule donnant son terme général.
1.2.1 , 1.2.2 , 1.2.3) Même types de calculs:

- $f^3(e_1)=f^3(e_2)=f^3(e_3)=0$
- pour $k>3$, on trouve $f(e_k)=\sum_{i=1}^{k-3}\left(\sum_{j=i+2}^{k-1} b_{i,j}a_{j,k}\right)$ si on pose $f^3(e_k)=f^2\left(f(e_k)\right)$ $\Big($ ou $f^3(e_{,k})=\sum_{i=1}^{k-3}\left(\sum_{j=i+1}^{k-2} a_{i,j}\right.$
  si on pose $f^3(e_k)=ff^2(e_k)$ $\Big)$
- donc si $C=A^3$ on a : $c_{i,k}=\begin{cases} 0 \text{ si } i>k-3 \\ \sum_{j=i+2}^{k-1} b_{i,j}a_{j,k} \text{ si } i\leq k-3 \text{ (ou } c_{i,k}=\sum_{j=i+1}^{k-2} a_{i,j}b_{j,k}) \end{cases}$

1.2.4) On remarque que $f(E)\subset V_{n-1}, f^2(E)\subset V_{n-2}$
Montrons par récurrence $\forall k<n$, $f^k(V_i)\subset V_{n-k}$

- pour $k=0$: $Id(E) \subset E = V_n$ par définition de "endomorphisme"
- pour $k=1$, $f(e_1) = 0 \in V_{n-1}$ et pour $k>1$, $f(e_k) = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i,k} e_i \in V_{k-1} \subset V_{n-1}$. Or l'image d'une base de E engendre l'image de E : $f(E) = Vect\left((e_k)_{k=1}^{n}\right) \subset V_{n-1}$
- hérédité : Si $f^k(E) \subset E_{n-k}$ et si $k-1<n$, $f^{k+1}(E) \subset f(E_{n-k})$, or $(e_j)_{j=1}^{n-k}$ est une base de E_{n-k} donc $(f(e_j))_{j=1}^{n-k}$ est une base de $f(E_{n-k})$ or $f(e_j) \in V_{j-1} \subset V_{n-k-1}$ car $j \leq n-k$. et donc $f^k(E) \subset V_{n-k}$

  Et donc $f^{n-1}(E) \subset V_1 = Vect(e_1)$ et donc $f^n(E) \subset f(V_1) = Vect\left(f(e_1)\right) = \{0\}$. Donc $f^n = 0$ donc $A^n = \square$

  Soit alors $K = \{p, A^p = \square\}$, cet ensemble est un sous ensemble non vide (il contient n) de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément $k \leq n$. $A^k = \square$ car $k \in K$ et $A^{k-1} \neq \square$ car $k-1 \notin K$.

$$\boxed{A \text{ est nilpotente d'ordre } k < n}$$

1.3) Si on a bien compris l'allure des matrices de la question précédente on introduit $A = M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A est du type précédent et A est nilpotente d'ordre au plus 4 . Le calcul donne alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \square \text{ et donc pour } j \geq 4 \ A^j = \square$$

Comme A et I_4 commutent on peut alors appliquer la formule du binôme de Newton pour $p \geq 3$

$$M^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i I_n^{p-i} = I_4 + pA + \frac{p(p-1)}{2} A^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} A^3 + \sum \square$$

la formule restant vraie pour $p \leq 2$, les termes manquants correspondants à des facteurs nuls.

$$M^p = \begin{pmatrix} 1 & 2p & 2p^2+p & \frac{4}{3}p^3 + 2p^2 + \frac{2}{3}p \\ 0 & 1 & 2p & 2p^2+p \\ 0 & 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.1) le sujet propose l'inverse de $I - N$ car

$$(I-N)P = (I-N)\sum_{k=0}^{n-1} N^k = \sum_{k=0}^{n-1} N^k - \sum_{k=0}^{n-1} N^{k+1} = N^0 - N^n = I_n$$

car N est nilpotent d'ordre $\leq n$.
I.4.2) avec les notations précédentes $M = I_4 - (-A)$ donc $M^{-1} = I_4 - A + A^2 - A^3$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I.4.3) Le calcul a déjà été fait pour p , et la formule est vérifiée pour $p=0$, reste à le faire pour $p<0$. Il faut donc calculer l'inverse de M^p. Or M^p se décompose sous la forme $M^p = I_4 - N_p$ avec

$$N_p = -\begin{pmatrix} 0 & 2p & 2p^2+p & \frac{4}{3}p^3 + 2p^2 + \frac{2}{3}p \\ 0 & 0 & 2p & 2p^2+p \\ 0 & 0 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on a donc

$$N_p^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4p^2 & 8p^3+4p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4p^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N_p^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8p^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$M^{-p} = \begin{pmatrix} 1 & -2p & 2p^2-p & -\frac{4}{3}p^3+2p^2-\frac{2}{3}p \\ 0 & 1 & -2p & 2p^2-p \\ 0 & 0 & 1 & -2p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on obtient aussi cette formule si on remplace p par $-p$ dans le résultat du **1.3)** . Ce n'est pas un hasard.

2.1.1) Comme A et B commutent on peut alors appliquer la formule du binôme de Newton

$$(A+B)^{\alpha+\beta-1} = \sum_{i=0}^{\gamma} \binom{\alpha+\beta-1}{i} A^i B^{\alpha+\beta-1-i}$$

pour $i \geq a$ on a $A^i = \square$ et pour $i < \alpha$ on a $\alpha+\beta-1-i \geq \beta$ et donc $B^{\alpha+\beta--i} = \square$ et donc :

$$(A+B)^{\alpha+\beta-1}$$

Donc comme au **1.2.4** $A+B$ est nilpotente d'ordre $\gamma \leq \alpha+\beta-1$

2.1.2) Calcul à soigner :

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} A^l B^{k-l} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k} \frac{A^l B^{k-l}}{l!\,(k-l)!}$$

et

$$e^A e^B = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{B^j}{j!} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^i B^j}{i!j!}$$

- On veut donc faire le changement de variable $\phi : (k,l) -> (l, k-l)$ Pour que ces deux sommes soient égales il faudrait que ce changement de variable soit bijectif de $\{(k,l), k \in \mathbb{N}, l \in [[0,k]]\}$ sur $\{(i,j)\} = \mathbb{N}^2$.
- Le changement de variable est injectif : $\phi(k,l) = \phi(K,L)$ si et seulement si $l = L$ et $k-l = K-L$ ce qui donne bien $l = L$ et $k = K$.
- Le changement de variable est surjectif : un antécédent du couple (i,j) est le couple $(i+j, i)$ qui vérifie bien la condition $i \in [[0, i+j]]$.
- Le changement de variable est bijectif donc

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont nilpotentes et commutent alors } e^{A+B} = e^A.e^B}$$

Remarque Si A et B ne commutent pas la relation est fausse : prendre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$A^2 = B^2 = BA = (A+B)^3 = \square \text{ , } AB = (A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A, B, A+B$ sont nilpotentes ,$AB \neq BA$ et

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{A+B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3) A et $-A$ commutent, si A est impotente $-A$ est aussi nilpotente et de plus $e^{\square} = I_n$. donc $e^A e^{-A} = e^{-A} e^A = e^{\square} = I_n$

$$\boxed{\text{pour } A \text{ nilpotente } e^A \text{ est inversible d'inverse } e^{-A}}$$

2.2) Dans les deux cas il n'est pas inutile de faire les calculs à la main pour des matrices 4×4 ou 5×5 pour voir ce qui se passe . pour $n = 5$ on trouve :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 1/24 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le premier cas on voit les diagonales constantes et les factoriels au dénominateurs dans e^A et le fait que dans A^p toutes les diagonales sont nuls sauf une qui contient des 1.
Dans le second on voit (moins bien) les coefficients binomiaux et le triangle de Pascal tordu.
Deux rédction sont possibles:

- utiliser les endomorphismes associés et calculer l'image d'une base : C'est le plan qui vous est imposé au I
- utiliser directement les formules du produit matriciel : si $C = A.B$ $c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}$

2.2.1) Rédaction utilisant l'endomorphisme :
On a :

$$A = (a_{i,k}) \, , a_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

soit

$$f(e_1) = 0 \ , \ k \geq 2 \Rightarrow f(e_k) = e_{k-1}$$

Les calculs de la première partie donne

$$f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0 \ , \ k \geq 3 \Rightarrow f^2(e_k) = e_{k-2}$$

et plus généralement

$$k \leq p \Rightarrow f^p(e_k) = 0 \ , \ k \geq p+1 \Rightarrow f^p(e_k) = e_{k-p}$$

Vérification par récurrence :

- vrai pour $p = 1$ et 2.
- Si c'est vrai à l'ordre p :
  - $k \leq p \Rightarrow f^p(e_k) = 0$ donc $f^{p+1}(e_k) = 0$
  - $k = p+1$, $f^{p+1}(e_k) = f(f^p(e_k)) = f(e_1) = 0$
  - $k \geq p+2$, $f^{p+1}(e_k) = f(f^p(e_k)) = f(e_{k-p}) = e_{k-p-1}$

et donc si $g = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^j}{j!}$ (de matrice e^A) $g(e_k) = e_k + f(_k) + \frac{f^2(e_k)}{2} + \cdots + \frac{f^n(e_k)}{n!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^p(e_k)}{p!} = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{e_{k-p}}{p!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{e_i}{(k-i)!}$
et donc si $e^A = X = (x_{i,k})$ on a $x_{i,k} = \frac{1}{(k-i)!}$ si $k \geq i$

2.2.1) Rédaction utilisant le produit matriciel :
On a :

$$A = (a_{i,k}) \, , a_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Les calculs de la première partie donne

$$A^2 = B \ , \ b_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = i+2 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

$$A^3 = C, c_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = i+3 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

et plus généralement pour $p < n$, $A^p = (a_{i,k,p})$ avec $a_{i,k,p} \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = i+p \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$
En effet on a $A^{p+1} = AA^p$ donc si la formule est vraie au rang p on a au rang $p+1$

$$a_{i,k,p+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} a_{j,k,p} = a_{i,i+1} a_{i+1,k,p} + \sum 0 = a_{i+1}, k, p = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = (i+1)+p = i+p+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

et donc $e^A = X = (x_{i,k})$ avec $x_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} 1/p! \text{ si } k = i+p \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ soit $x_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{(k-i)!} \text{ si } k \geq i \\ 0 \text{ si } k < i \end{array} \right.$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & \cdots & 1/(n-1)! \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n-2)! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 1/2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2) Rédaction utilisant l'endomorphisme :
On a :

$$A = (a_{i,k}) \, , a_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

soit

$$f(e_1) = 0 \ , \ k \geq 2 \Rightarrow f(e_k) = (k-1)\, e_{k-1}$$

comme à la première partie donne

$$f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0 \ , \ k \geq 3 \Rightarrow f^2(e_k) f\left(f\left(e_k\right)\right) = k-1) f\left(e_{k-1}\right) = (k-1)(k-2)\, e_{k-2}$$

et plus généralement

$$k \leq p \Rightarrow f^p(e_k) = 0 \ , \ k \geq p+1 \Rightarrow f^p(e_k) = (k-1)(k-2)\cdots(k-p) e_{k-p} = \prod_{i=1}^{p} (k-i)\, e_{k-p}$$

Vérification par récurrence :

- vrai pour $p = 1$ et 2.
- Si c'est vrai à l'ordre p :
  - $k \leq p \Rightarrow f^p(e_k) = 0$ donc $f^{p+1}(e_k) = 0$
  - $k = p+1$, $f^{p+1}(e_k) = f\left(f^p(e_k)\right) = (k-1)! f\left(e_1\right) = 0$
  - $k \geq p+2$, $f^{p+1}(e_k) = f\left(f^p(e_k)\right) = \prod_{i=1}^{p} (k-i)\, .f\left(e_{k-p}\right) = \left(\prod_{i=1}^{p}(k-i)\right)(k-p-1)\, e_{k-p-1} = \left(\prod_{i=1}^{p+1}(k-i)\right) f\,(e_{k-}$

et donc si $g = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^j}{j!}$ (de matrice e^A)

$$g(e_k) = e_k + f(_k) + \frac{f^2(e_k)}{2} + \cdots + \frac{f^n(e_k)}{n!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^p\left(e_k\right)}{p!} = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\prod_{i=1}^{p}(k-i)}{p!} e_{k-p} = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k-1}{p} e_{k-p} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{k-i} e_i$$

et donc si $e^A = X = (x_{i,k})$ on a $x_{i,k} = \binom{k-1}{k-i}$

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-2 & (n-2)(n-1)/2 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2: rédaction utilisant le produit matriciel :
On a :

$$A = (a_{i,k})\, , a_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} i \text{ si } k = i+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Les calculs de la première partie donne

$$A^2 = B \ , \ b_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} i(i+1) \text{ si } k = i+2 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

$$A^3 = C, c_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} i(i+1)(i+2) \text{ si } k = i+3 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

et plus généralement pour $p < n$, $A^p = (a_{i,k,p})$ avec $a_{i,k,p} \left\{ \begin{array}{c} i(i+1)\cdots(i+p-1) \text{ si } k = i+p \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$
En effet on a $A^{p+1} = AA^p$ donc si la formule est vraie au rang p on a au rang $p+1$

$$a_{i,k,p+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} a_{j,k,p} = a_{i,i+1} a_{i+1,k,p} + \sum 0 = i.a_{i+1}, k, p = \left\{ \begin{array}{c} i.\left((i+1)\cdots(i+1+p-1)\right) \text{ si } k = (i+1)+p = i+p+1 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

et donc $e^A = X = (x_{i,k})$ avec $x_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} i(i+1)\cdots(i+p-1)/p! = \binom{i+p-1}{p} \text{ si } k = i+p \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ soit $x_{i,k} = \left\{ \begin{array}{c} \binom{k-1}{k-i} \text{ si } k \geq i \\ 0 \text{ si } k < i \end{array} \right.$ si $k \geq i$