1. $\phi$ est l'isomorphisme canonique entre l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimensions $n$ muni d'une base et l'ensemble des matrices carrées $n \times n$

   $\phi^{-1}$ est donc un isomorphisme d'algèbre de $M_n(\mathbb{C})$ dans $End(\mathbb{C}^n)$

2.

   1. $M_2(\mathbb{C})$ est de dimension 4.
   2. pour toutes matrices $M$ et $N$ et tout complexe $\lambda$ :

   $$\phi_A(\lambda M + N) = A.(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N)$$

   de plus si $M \in M_2(\mathbb{C})$ alors $\phi_A\ (M) = AM \in M_2(\mathbb{C})$ .
   $\phi_A$ est bien un endomorphisme de $M_2(\mathbb{C})$
   $\phi_A$ étant un endomorphisme en dimension finie, $\phi_A$ est injective si et seulement si $\phi_A$ est surjective.
   $\phi_A$ est injective si et seulement si $A$ est inversible:

   - Si $A$ est inversible $AM = (0) \Rightarrow M = A^{-1}(0) = (0)$
   - Si $A$ n'est pas inversible il existe une matrice colonne non nulle $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$ , la matrice$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle du noyau de $\phi_A$

   $$\boxed{\phi_A \text{ est un endomorphisme de } M_2(\mathbb{C}) \text{ , injectif (et surjectif) ssi } A \text{ est inversible}}$$

   3. On calcule l'image des vecteurs de base

   $$\phi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = aE_{11} + cE_{2,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,2}$$

   la première colonne de la matrice dans la base $(E_{11}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ est donc $\begin{pmatrix} a \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Le calcul de l'image des autres matrices de bases donne :

   $$Mat\,(\phi_A) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & A \end{pmatrix}$$

   *remarque : ce qui est bien un exemple du résultat à démontrer à la dernière question du problème.*

   4.

   - $\rho$ est linéaire : On vérifie que pour toutes matrices $A$ et $B$ et tout complexe $\lambda$ $\phi_{\lambda A+B} = \lambda\phi_A + \phi_B$. Deux applications sont égales si et seulement les images d'un élément quelconque sont égales:

   $$\forall M \in M_2(\mathbb{C}) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{\lambda A+B}(M) = (\lambda A + B)\,M = \lambda AM + BM \\ (\lambda\phi_A + \phi_B)\,(M) = \lambda\phi_A(M) + \phi_B(M) = \lambda AM + BM \end{array} \right.$$

   les deux quantités sont égales pour tout $M$ : $\rho(\lambda A + B) = \lambda\rho(A) + \rho(B)$
   - $\rho(AB) = \rho(A) \circ \rho(B)$ car $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$

   $$\forall M \in M_2(\mathbb{C}) \left\{ \begin{array}{l} \phi_{AB}(M) = (AB)M \\ \phi_A \circ \phi_B(M) = \phi_A\,(\phi_B(M)) = \phi_A(BM) = A\,(BM) \end{array} \right.$$

   les deux quantités sont égales .
   - $\rho(\mathbf{1}_2) = Id_{M_2(\mathbb{C})}$ car $\phi_{\mathbf{1}_2}(M) = \mathbf{1}_2.M = M$

   $$\boxed{\rho \text{ est un morphisme d'algèbre}}$$

   - $\rho$ est injective : si $\phi_A = \widetilde{0}_{M_2(\mathbb{C})}$ on a pour toute matrice $M$ $AM = (0)$ il suffit de prendre $M = \mathbf{1}_2$ pour avoir $A = (0)$ . Le noyau est réduit à $\{(0)\}$
   - $\rho$ ne peut pas être surjective car la dimension de l'espace d'arrivée $(\dim(End\,(M_2(\mathbb{C}))) = 4 \times 4 = 16)$ est strictement supérieur à celle de l'espace de départ (4)

3.

1. Si $p(x)=x$ alors $x$ est l'image de $x$ donc $x\in\operatorname{Im}(p)$
réciproquement si $x\in\operatorname{Im}(p)$ , il existe $w\in W$ tel que $x=p(w)$ . on a alors comme $p^2=p$ :

$$p(x)=p^2(w)=p(w)=x$$

l'endomorphisme induit par $p$ sur $\operatorname{Im}(p)$ est donc l'application identité de $\operatorname{Im}(p)$ : $Id_{\operatorname{Im}(p)}$
la restriction de $p$ à $\operatorname{Ker}(p)$ est l'application nulle de $\mathcal{L}(\operatorname{Ker}(p),W)$.

2.

- Si $\alpha)$ est vérifiée :
  - $p_i$ est un projecteur donc $p_i^2=p_i$
  - si $i\neq j$ , $\operatorname{Im}(p_j)\subset\oplus_{k\neq i}\operatorname{Im}(p_k)=\operatorname{Ker}(p_i)$ donc $p_i\circ p_j=\widetilde{0}_W$
  - Si, $w\in W$ , comme on a $W=\oplus\operatorname{Im}(p_i)$ on a $w=\sum_{i=1}^{m}w_i$ avec $w_i\in\operatorname{Im}(p_i)$.

    Or $w_i\in\operatorname{Im}(p_i)$ et $\sum_{j\neq i}w_j\in\oplus_{j\neq i}\operatorname{Im}(p_j)=\operatorname{Ker}(p_i)$ et donc par définition du projecteur $p_i$: $w_i=p_i(w)$ . on a donc

    $$w=\sum_{i=1}^{m}p_i(w)=\left(\sum_{i=1}^{m}p_i\right)(w)$$

    .

    Pour tout $w\in W$ on a donc $Id_W(w)=\left(\sum_{i=1}^{m}p_i\right)(w)$ et donc $Id_W=\sum_{i=1}^{m}p_i$
- Si $\beta)$ est vérifiée :
  - $p_i$ est un projecteur car $p_i^2=p_i$
  - $W$ est somme des images de $p_i$ : $\forall w\in W$ , $w=Id_W(w)=\left(\sum_{i=1}^{m}p_i\right)(w)=\sum_{i=1}^{m}p_i(w)\in\sum_{i=1}^{m}\operatorname{Im}(p_i)$
  - La somme est directe par unicité de la décomposition de $\overrightarrow{0}$ :

    soit $\overrightarrow{0}=\sum_{i=1}^{m}w_i$ avec $w_i\in\operatorname{Im}(p_i)$ . Chaque $w_i$ vérifie $w_i=p_i(w_i)$ car on a un projecteur. On a donc :

    $$\overrightarrow{0}=\sum_{i=1}^{m}p_i\left(w_i\right)$$

    Si on compose par $p_j$ tout se simplifie car si $i\neq j$ : $p_j\circ p_i=\widetilde{0}_W$ et si $i=j$ $p_j\circ p_i=p_j^2=p_j$ :

    $$\overrightarrow{0}=p_j(w_j)=w_j$$

    donc en faisant varier $j$ tous les $w_j$ sont nuls et donc la somme est directe.
  - $\oplus_{j\neq i}\operatorname{Im}(p_j)$ est donc bien une somme directe supplémentaire de $\operatorname{Im}(p_i)$ . et si $w=\sum_{k=1}^{n}w_k$ avec $w_k\in\operatorname{Im}(p_k)$ , le même calcul que pour la somme directe donne $w_i=p_i(w)$ et donc $p_i$ est la projection sur $\operatorname{Im}(p_i)$de direction $\oplus_{j\neq i}\operatorname{Im}(p_l)$

    $\boxed{\text{les deux propriétés sont équivalentes.}}$

4.

- toutes les lignes de $E_{i,j}$ sont nuls sauf la ligne $i$ . donc toutes les lignes de $E_{i,j}E_{k,l}$ sont nuls , sauf peut-être la $i-$ème
- toutes les colonnes de $E_{k,l}$ sont nuls sauf la colonne $l$ . donc toutes les colonnes de $E_{i,j}E_{k,l}$ sont nuls , sauf peut-être la $l-$ème
- le seul coefficient éventuellement non nul de $E_{i,j}E_{k,l}$ est donc celui ligne $i$ colonne $l$.La formule du produit matriciel $(AB)_{i,l}=\sum_{p=1}^{n}(A)_{i,p}\,(B)_{p,l}$ , montre que dans le produit matriciel on a une somme :

$$\begin{cases} 0.0+0.0+\cdots+0.1+\cdots=0 \text{ si } j\neq k \\ 0.0+\cdots+0.0+1.1+0.0\cdots+0.0=1 \text{ si } j=k \end{cases}$$

$$\boxed{E_{i,j}E_{k;l}=\begin{cases}0 \text{ si } j\neq k\\ E_{i,l} \text{ si } j=k\end{cases}}$$

*remarque : comme souvent l'étude des matrices $2\times 2$ donne l'idée du résultat.*

5. On doit prendre $m=n$. Vérifions la propriété $\beta)$ :
   - $p_i^2=\rho(E_{i,i})\circ\rho(E_{i,i})=\rho(E_{i,i}E_{i,i})=\rho(E_{i,i})=p_i$ : en utilisant le morphisme d'algèbre et le calcul précédent
   - si $i\neq j$ : $p_i\circ p_j=\rho(E_{i,i})\circ\rho(E_{j,j})=\rho(E_{i,i}E_{j,j})=\rho(0)=\widetilde{0}_W$ en utilisant le morphisme d'algèbre et le calcul précédent
   - $\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i=\sum_{i=1}^n\rho(E_{i,i})=\rho\left(\sum_{i=1}^n E_{i,i}\right)=\rho(\mathbf{1}_n)=Id_W$ en utilisant le morphisme d'algèbre et la décomposition de la matrice identité dans la base canonique.

   $$\boxed{\text{les } p_i=\rho(E_{i,i}) \text{ vérifie les hypothèses de 1.2}}$$

   En particulier $p_i$ est la projection sur $W_i$ de direction $\oplus_{j\neq i}W_j$ et $W=\oplus W_i$

6. 
   1. On a :
      $$\rho(E_{i,i})\circ\rho(E_{i,j})=\rho(E_{i,i}E_{i,j})=\rho(E_{i,j})$$
      On cherche à montrer que l'image par $\rho(E_{i,j})$ de $W_j$ est incluse dans $W_i$ : .Soit donc $x=\rho(E_{i,j})(w_j)$ avec $w_j\in W_j$ .
      On veut $x\in W_i=\operatorname{Im}(p_i)$ . Or $p_i$ est un projecteur il suffit de vérifier $p_i(x)=x$ :
      $$p_i(x)=(\rho(E_{i,i}))\left[\rho(E_{i,j})(w_j)\right]=(\rho(E_{i,j}))(w_j)=x$$
   2. $\rho(E_{i,j})\circ\rho(E_{j,i})=\rho(E_{i,j}E_{j,i})=\rho(E_{i,i})=p_i$
      la restriction de $\rho(E_{i,j})$ à $W_j$ est une application linéaire de $W_j$ dans $W_i$ . Mais de même celle de $\rho(E_{j,i})$ à $W_i$ est une application linéaire de $W_i$ dans $W_j$ . et comme $\rho(E_{i,j})\circ\rho(E_{j,i})=\rho(E_{i,i})=p_i$ , le composé des deux restrictions est l'endomorphisme induit par $p_i$ à $W_i$ , donc l'application identique de $W_i$(propriété des projecteur de la première question) . , et de même la restriction de $\rho(E_{j,i})\circ\rho(E_{i,j})$ à $W_j$est l'identité de $W_j$ . On a donc deux bijections réciproques et des isomorphismes.
   3. Un isomorphisme conserve la dimension donc $\dim(W_j)=\dim(W_i)$
   4. et comme d'après la question 1 $W=\oplus_{i=1}^n\operatorname{Im}(p_i)=\oplus_{i=1}^n(W_i)$ , on a $\displaystyle\dim(W)=\sum_{i=1}^n\dim(W_i)=rn$

   $$\boxed{\dim(W)=rn}$$

7. 
   1. $v_{1,1}=p_1(w_1)=w_1$ car $w_1$ est dans l'image du projecteur $p_1$
   2. pour tout $i$ : $v_{i,1}=\rho(E_{i,1})w$ est un vecteur de l'image de $W_1$ par $\rho(E_{i,1})$ , c'est donc un vecteur non nul de $W_i$ (car la restriction est un isomorphisme) . Or la somme des $W_i$ est directe . Donc la famille $(v_i)_{i=1}^n$ est libre :
      $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\alpha_i v_{i,1}&=\overrightarrow{0}\Rightarrow\forall i\in[[1,n]]\ ,\ \alpha_i v_{i,1}=\overrightarrow{0}\ \text{(somme directe)}\\ &\Rightarrow\quad\alpha_i=0\text{ car } v_{i,1}\neq\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

8. Les $(w_j)_{j=1}^r$ forment par définition une base de $W_1$ . Or la restriction de $\rho(E_{i,1})$ à $W_1$ induit un isomorphisme de $W_1$ sur $W_i$ , et donc l'image de la base de $W_1$ est une base de $W_i$ . $(v_{i,j})_{j=1}^r$ est une base de $W_i$ / Mais $W=\oplus_{i=1}^n W_i$ , et donc une base de $W$ est l'union d'une base de chaque $W_i$.

   $$\boxed{(v_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq r}\text{ est une base de } W}$$

   Or $V_j=\operatorname{Vect}(v_{i,j})_{i=1}^n$ . Une base de $W$ est l'union d'une base de chaque $V_j$ . la somme est donc directe.

9.

1. $(\rho(E_{k,l}))(v_{i,j}) = (\rho(E_{k,l}))(\rho(E_{i,1})(w_j)) = (\rho(E_{k,l}E_{i,1}))(w_j)$ :toujours le morphisme d'algèbre.

   et donc $(\rho(E_{k,l}))(v_{i,j}) = \left\{ \begin{array}{c} (\rho(0))(w_j) = \widetilde{0_W}(w_j) = \overrightarrow{0} \text{ si } l \neq i \\ (\rho(E_{k,1}))(w_j) = v_{k,j} \text{ si } l = i \end{array} \right.$

   l'image par $\rho(E_{k,l})$ d'un vecteur $v_{i,j}$ de $V_j$ est donc soit nul soit un $v_{k,j}$ donc toujours un vecteur de $V_j$ . L'image d'une base de $V_j$ est une famille de $V_j$ , donc, par combinaison linéaire, l'image de tout vecteur de $V_j$ est élément de $V_j$ . $V_j$ est stable par $\rho(E_{k,l})$.

   *La question suivante donne la réponse qu'il faut trouver.*

2. La matrice de $\rho(E_{k,l})$ est donc diagonale par blocs , chaque bloc représentant la matrice de l'endomorphisme induit par $\rho(E_{k,l})$ sur $V_j$ .

   La matrice de $\rho(E_{k,l})$ est la matrice dont les colonnes représente l'image des vecteurs de base .

   Or $(\rho(E_{k,l}))(v_{i,j}) = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \text{ si } l \neq i \\ v_{k,j} \text{ si } l = i \end{array} \right.$ . Donc toutes les colonnes pour $i \neq l$ sont nulles.

   - étude de la matrice de l'endomorphisme induit sur $V_j$ : ($j$ est donc fixé)
     - si $i \neq l$ : la colonne est nulle
     - la seule colonne non nulle est la colonne $l$ ,.cette colonne ayant un et un seul coefficient non nul sur la ligne correspondant à $v_{k,1}$ , donc la ligne $k$
     - tous les coefficients sont nuls sauf celui ligne $k$ , colonne $l$ . Donc la matrice de l'endomorphisme induit est $E_{k,l}$ .
   - La matrice de $\rho(E_{k,l})$ dans la base $(v_{i,j})$ est la matrice diagonale par blocs dont les termes diagonaux sont les blocs $E_{k,l}$

10. Les deux applications $M- > Mat(\rho(M))$ et $M- > diag(M, \cdots M)$ sont linéaires et égales sur la base $E_{i,j}$ de $M_n(\mathbb{C})$ . elles sont donc égales pour toute matrice $M$.

$$\boxed{\forall M \in M_n(\mathbb{C}) , Mat_{\{v_{i,j}\}}(\rho(M)) = diag(M, \cdots M)}$$