Le sujet est inspiré du sujet C.C.P. 20O8 de la filière TSI avec les modifications suivantes:

- adaptation des parties 1 et 2 à l'état d'avancement du cours. Le sujet initial utilise la notion de diagonalisation des matrices symétriques réelles. En pratique les calculs restent les mêmes.
- dans le sujet initial les parties 3 et 4 restent dans $\mathbb{R}^3$. Vous faites plus de math que les TSI . J'ai donc repris le cas général . j'ai ensuite repris les questions du sujet en rajoutant la démonstration que φ est une norme.

PARTIE 1

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. $\det(A) = 4$ donc A est inversible.

3. $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $Q = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5.

a) On fait passer les termes diagonaux dans l'autre membre :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ & & -y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -y-3 = -2x \\ -x-z+5 = -2y \\ -y-5 = -2z \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{y}{2} + \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{2} + \dfrac{5}{2} \\ z = \dfrac{y}{2} + \dfrac{5}{2} \end{array} \right.$$

On a donc : $K = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{(i,jk)}(f) = J$ et on cherche une base orthonormale directe telle que $Mat_{(u,v,w)}(f) = D$

On veut

- donc $f(u) = 0$ donc $u \in \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{(i,jk)}$
- $f(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u,v,w)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}v$ donc $v \in \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(i,jk)}$
- $f(w) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}_{(u,v,w)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}w$ donc $w \in \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(i,jk)}$
- On constate que les vecteurs u, v, w sont toujours orthogonaux 2 à 2 . On les norme :

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{(i,jk)}, v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(i,jk)}, w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}_{(i,jk)}$$

Reste à vérifier que la base est directe $\det(u, v, w) = +1$. c'est bon (si on trouve -1 on remplace w par $-w$)

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

remarque 1 : Il y a 4 (et seulement 4) réponses justes . On peut remplacer u, v, w par leurs opposés ce qui donne 8 bases orthonormales , 4 sont directes et 4 indirectes.

remarque 5/2 : La matrice est symétrique réelle , donc diagonalisable dans une base orthonormale. Vous savez que la base existe . une fois les deux premiers vecteurs calculés, leur produit vectoriel donne le troisième.

c) vérification sans problème.

remarque : toute matrice de passage d'une base OND à une base OND vérifie $P^{-1} = {}^tP$

d) $J^p = PD^pP^{-1} = PD^{p\,t}P$

$$\boxed{\text{pour } k=0 \text{ , } J^{2k} = I_3}$$

$$\boxed{\text{pour } k \geq 1 : \ J^{2k} = \begin{pmatrix} 2^{-1-k} & 0 & 2^{-1-k} \\ 0 & 2^{-k} & 0 \\ 2^{-1-k} & 0 & 2^{-1-k} \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\text{pour } k \geq 0 : \ J^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{-1-k} & 0 \\ 2^{-1-k} & 0 & 2^{-1-k} \\ 0 & 2^{-1-k} & 0 \end{pmatrix}}$$

6. $X_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \Delta_1 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

7.
```
> with(linalg):
> X:=matrix(3,1,[1,2,0]);
> J:=matrix(3,3,[0,1/2,0,1/2,0,1/2,0,1/2,0]);
> K:=matrix(3,1,[3/2,-5/2,5/2]);
> phi:= M->J&*M+K;
> for i from 1 to 2008 do X:=evalm(phi(X)) od :
> evalm(X);
```

remarque : dans une épreuve sans machine il semble logique de remplacer l'avant dernière ligne par `X:=(phi@@2008)(X)`.En pratique on constate que 2008 est trop grand et que Maple répond "trop de niveau de récursivité"

8.

a) On a $\Delta^{(p+1)} = X^{(p+1)} - Q = \left(JX^{(p)} + K\right) - (JQ + K) = J(X^{(p)} - Q) = J\Delta^{(p)}$

N'oubliez pas que Q est la solution de l'équation.

remarque : C'est la méthode générale de résolution d'une suite arithmético géométrique en cherchant le "point" fixe.

On a donc (suite géométrique):$\forall p \in \mathbb{N}$, $\Delta^{(p)} = J^p\Delta^{(0)} = PD^pP^{-1}\Delta^{(0)}$. Or $P^{-1} = {}^tP$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \ \Delta^{(p)} = PD^p.{}^tP\Delta^{(0)}}$$

b) attention à $p = 0$.

Si $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on a :

- pour $p = 0$ $D^pU = U$ et on a bien $\|U\| \leq \dfrac{1}{2^0}\|U\|$
- pour $p > 0$ $D^pU = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^p}\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ (-1)^pc \end{pmatrix}$ donc $\|D^pU\| = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^p}\sqrt{b^2+c^2} \leq \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^p}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{1}{2^{p/2}}\|U\|$

c) On constate que ${}^tUU = \left(a^2+b^2+c^2\right) = \left(\|U\|^2\right)$

Donc $\left(\|PU\|^2\right) = {}^t(PU)(PU) = {}^tU{}^tPPU = {}^tUU = \left(\|U\|^2\right)$ car on a montré : ${}^tPP = I_3$. deux matrices 1×1 sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux . Et donc en prenant la racine carrée de réelles positifs

$$\boxed{\|PU\| = \|U\|}$$

On a aussi ${}^tPP = I_3$ et de même

$$\boxed{\left\|{}^tPU\right\| = \|U\|}$$

d) En regroupant les inégalités pour simplifier de gauche à droite :

$$\begin{aligned}\left\|\Delta^{(p)}\right\| &= \left\|PD^p.{}^tP\Delta^{(0)}\right\| \\ &= \left\|D^p.{}^tP\Delta^{(0)}\right\| \\ &\leq \frac{1}{2^{p/2}}\left\|{}^tP\Delta^{(0)}\right\| \\ &\leq \frac{1}{2^{p/2}}\left\|\Delta^{(0)}\right\|\end{aligned}$$

Or $\Delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ de norme $\sqrt{13}$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \left\|\Delta^{(p)}\right\| \leq 2^{-p/2}\sqrt{13}}$$

9. La suite $\left(\left\|X^{(p)} - Q\right\|\right)$ tend donc vers 0

$$\boxed{\text{la suite } \left(X^{(p)}\right) \text{ converge vers } Y.}$$

10. La condition est vérifiée si $2^{-p/2}\sqrt{13} \leq 10^{-3}$ soit $p \geq \dfrac{\ln(13) + 6\ln(10)}{\ln(2)}$. La calculatrice donne $\boxed{p = 24}$.

remarque : le sujet demande une solution , pas les solutions , ou la plus petite solution.

Partie 2

1. E est l'espace vectoriel engendré par $J(1,0) = I_3$ et $J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices sont non nulles et non proportionnelles . Elles forment donc une base de E .

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel de dimension } 2}$$

2. calcul : $J(a,b).J(A,B) = J(aA + 2bB, aB + bA + bB)$

3. $U(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Une base de l'image est donc $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \Leftrightarrow x + y + z = 0$ dont une base est $\left(W = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, W' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

La réunion des 3 vecteurs de base est une famille de trois vecteurs libres (det $= 3$) donc une base .

4. sans problème $U(1).V = 3V$.

On prend f tel que $Mat_{(i,jk)}(f) = U(1)$. D'après les calculs précédents on constate que $Mat_{(V,W,W')}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$ qui est diagonale. Soit $P = Mat_{(i,jk)}(V, W, W')$

5. $\lambda = a - b$

6. on a $bU(1) = J(a,b) - \lambda I_3$ donc $J(a,b) = bU(1) + \lambda I_3 = bPDP^{-1} + \lambda I_3 = P(bD + \lambda I_3)P^{-1}$. $J(a,b)$ est semblable à la matrice diagonale $bD + \lambda I_3 = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$

remarque : la solution est unique à l'ordre des termes diagonaux près.

Partie 3

1. La somme des valeurs absolues des coefficients des lignes est respectivement $4, 1, 6$ donc $\varphi(A) = 6$

2.

   - $\{l_i, i \in [[1, n]]\}$ est un ensemble fini de réels positifs , donc le maximum existe et c'est un réel positif.
   - On a $\varphi(M) = \max \left\{ \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|, i \in [[1, n]] \right\}$. Chacune des sommes vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire , donc aussi leur maximum.
   - si $\varphi(M) = 0$, chaque somme est nulle , et comme les termes sont positifs , tous les coefficients sont nuls.

$$\boxed{\varphi \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

3.

   a) produit matriciel :

$$\forall i \in [[1, n]], x'_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$$

   b) On a donc pour $i \in [[1, n]]$

$$|x'_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| . \max(|x_j|, j \in [[1, n]]) = \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \|X\|_\infty = l_i \|X\|_\infty$$

   c) On majore l_i par $\varphi(M)$. $\varphi(M) \|x\|_\infty$ est donc un majorant de $|x'_i|$ indépendant de i . Il est plus grand que le maximum

$$\boxed{\|MX\|_\infty \leq \varphi(M) \|X\|_\infty}$$

   Pour trouver le cas d'égalité on explicite le fait que le maximum est atteint : $\exists i_0$, $\varphi(M) = l_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |m_{i_0,j}| = \sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} \varepsilon_j$ en posant $\varepsilon_j = \begin{cases} 1 \text{ si } m_{i_0,j} \geq 0 \\ -1 \text{ si } m_{i_0,j} < 0 \end{cases}$ .. Si on prend $X_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$ on vérifie que $\|X_0\|_\infty = 1$. De plus d'après la question précédente en notant $X' = MX_0$ on a $\forall i \in [[1, n]], |x'_i| \leq l_i \|X_0\|_\infty = l_i$ et $\left|x'_{i_0}\right| = x'_{i_0} = l_{i_0}$. Le maximum est donc atteint en i_0 et donc pour cette matrice X_0 . $\|MX_0\|_\infty = l_{i_0} = \varphi(M) = \varphi(M) \|X_0\|_\infty$.

   d) on sait déjà que φ est une norme . Il reste à vérifier que : $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 : \varphi(MN) \leq \varphi(M)\varphi(N)$

   Alors pour toute matrice colonne X :

$$\|MNX\|_\infty \leq \varphi(M) \|NX\|_\infty \leq \varphi(M)\varphi(N) \|X\|_\infty$$

   Il reste à prendre une matrice X_0 déterminée à la question précédente telle que $\|MNX_0\|_\infty = \varphi(MN) \|X_0\|_\infty$ et $X_0 \neq 0$

$$\boxed{\varphi \text{ est une norme d'algèbre}}$$

Partie 4

1. Le système de Cramer $A_0X = B_0$ est équivalent, par Pivot de Gauss, à un système triangulaire $TX = C$. Pour ce système tous les termes diagonaux sont non nuls. .Donc $A = T$ est une solution du problème.

   Mais c'est une mauvaise réponse , car calculer T est équivalent à résoudre le système par Pivot de Gauss ... c'est justement ce qu'on ne veut pas faire.

   On va faire un Pivot de Gauss partiel pour transformer A_0 :

   - Pour chaque ligne i telle que le coefficient diagonale est non nul , on ne fait rien.
   - Pour chaque ligne i telle que le coefficient diagonale est nul , on cherche une ligne j telle que $(A_0)_{j,i} \neq 0$ (elle existe sinon la colonne i de A_0 ne continent que des 0 et le système n'est pas de Cramer) . On effectue alors le Pivot $L_i \leftarrow L_i + L_j$. Le nouveau terme diagonal est $(A_0)_{j,i} \neq 0$, tous les autres ne sont pas changés.

- La matrice obtenue a tous ses termes diagonaux non nuls.

  Certes on a fait un Pivot de Gauss, mais il est beaucoup plus rapide que celui qui trigonalise le système : Au plus n additions de lignes.

2. On décompose $A = D + P$ avec D et P ayant tous ses termes diagonaux nuls.

$$AX = B \Leftrightarrow (D + P)X = B \Leftrightarrow DX = -PX + B$$

mais par hypothèse tous les termes diagonaux de D sont ceux de A donc sont non nuls.

$$AX = B \Leftrightarrow X = (-D^{-1}P)X + (D^{-1}B)$$

$$\boxed{\text{si } A = D + P \text{ alors } J = -D^{-1}P \text{ et } K = D^{-1}B}$$

3. Comme partie 1 : On a $\Delta^{(p+1)} = X^{(p+1)} - Q = \left(JX^{(p)} + K\right) - (JQ + K) = J(X^{(p)} - Q) = J\Delta^{(p)}$ et donc $\Delta^{(p)} = J^p\Delta^{(0)}$.

4. On a donc $\left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty \leq \varphi(J^p)\left\|\Delta^{(0)}\right\|$ d'après $III.2.c$. Or φ est une norme d'algèbre donc pour $p \geq 1$ $\varphi(J^p) \leq \varphi(J)^p$. La relation étant vraie pour $p = 0$ $(1 \leq 1)$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \text{ , } \left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty \leq \varphi(J)^p \left\|\Delta^{(0)}\right\|}$$

5. Une condition suffisante est donc d'avoir $\varphi(J) < 1$. Ce qui donne une majoration par une suite géométrique de raison dans $] - 1, 1[$.

6. Si la condition est vérifiée $\left\|X^{(p)} - Q\right\|_\infty$ tend vers 0.

$$\boxed{\varphi(J) < 1 \Rightarrow \lim\left(X^{(p)}\right) = Q}$$

7. pour J on a $l_2 = 1, l_1 = l_3 = 1/2$ donc $\varphi(J) = 1$. La condition n'est pas vérifiée.

8.

   a) $J = PDP^{-1}$ et donc $J^p = PD^pP^{-1}$. On a donc $\Delta^{(p)} = PD^pP^{-1}\Delta^{(0)}$ et donc en prenant la norme et en majorant avec les propriétés de la partie III:

$$\left\|\Delta^{(p)}\right\|_\infty \leq \varphi(P)\varphi(D)^p\varphi(P^{-1})\left\|\Delta^{(0)}\right\|$$

   b) une condition suffisante est donc que $\varphi(D) < 1$. La suite $\left(X^{(p)}\right)$ converge alors vers Q .

   c) Dans l'exemple $\varphi(D) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et la condition est remplie.

9. sans problème $\varphi(J(0, b)) = 2\,|b|$ et $\varphi(D) = 2\,|b|$