Préliminaires

1. c.f. cours:Une famille $(\overrightarrow{x_i})_{i=1}^{n}$ est une famille libre si et seulement si :

$$\forall\,(\lambda_i)_{i=1}^{n}\in\mathbb{K}^n\ ,\ \left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{x_i}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\forall\lambda_i=0\right)$$

   la seule combinaison linéaire nulle a tous ses coefficients nuls.

2.
   1. La première famille $(x\mapsto 1, x\mapsto x, x\mapsto x^2, x\mapsto x^3)$ est <u>libre</u>:
      Si $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i f_i=0$ alors le polynôme $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i x^{i-1}$ admet une infinité de racines . Il est donc nul et tous ses coefficients sont nuls.
   2. La seconde famille $(f_1:x\mapsto 1, f_2:x\mapsto\cos(x), f_3:x\mapsto\cos(2x), f_4:x\mapsto\cos^2(x))$ <u>n'est pas libre</u>.
      En effet, la relation trigonométrique classique $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$, valable pour tout $x\in\mathbb{R}$ montre que f_3 est combinaison linéaire de f_1 et de f_4
   3. Montrons que la troisième famille $(f_1:x\mapsto 1, f_2:x\mapsto x^3+1, f_3:x\mapsto|x^3|)$ est libre :
      Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha.f_1+\beta.f_2+\gamma.f_3=0$.
      Alors pour tout réel x, $\alpha+\beta(x^3+1)+\gamma|x^3|=0$. Ce qui donne, avec $x=0$, $x=1$ et $x=-1$ le système linéaire :

$$\alpha+\beta=0,\alpha+2\beta+\gamma=0,\alpha+\gamma=0$$

      la première et la troisième équation donne $\beta=\gamma=-\alpha$ et donc en reportant dans la seconde : $\alpha=\beta=\gamma=0$
      remarque le déterminant du système vaut $2\neq 0$ ce qui permet aussi de conclure.

3. La première et la troisième famille étant libre, elles engendrent des sous-espaces vectoriels de dimension leur cardinal, c'est à dire respectivement 4 et 3.

   La deuxième famille étant liée, elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension au plus 3. Montrons que la famille (f_1,f_2,f_3) est libre, ce qui nous permettra d'affirmer que la dimension du sous-espace engendré par (c_1,c_2,c_3,c_4) est supérieure à 3, donc égale à 3.

   Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha.f_1+\beta.f_2+\gamma.f_3=0$.

   Alors pour tout réel x, $\alpha+\beta\cos(x)+\gamma\cos(2x)=0$. Ce qui donne, avec $x=0$, $x=\pi$et $x=\frac{\pi}{2}$ le système linéaire:

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\alpha-\beta+\gamma=0,\alpha-\gamma=0$$

   les deux premières équatios donnent $\beta=0$. On en déduit alors facilement $\alpha=\gamma=0$

$$\boxed{rg(F_1)=4, rg(F_2)=3, rg(F_3)=3}$$

Partie I

1. Montrons que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

   Remarquons que $0_{\mathcal{C}^2([-1,1])}\in\mathcal{G}$, donc $\mathcal{G}\neq\emptyset$.De plus $\mathcal{G}$ est un sous ensemble de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^2([-1,1],\mathbb{R})$.

   Soient $f,g\in\mathcal{G}$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $f,g\in\mathcal{C}^2([-1,1])$ et il existe $P_1,P_2,Q_1,Q_2\in\mathbb{R}_3[X]$ tels que

   - $\forall x\in[-1,0[$, $f(x)=P_1(x)$ et $g(x)=Q_1(x)$;
   - $\forall x\in]0,1]$, $f(x)=P_2(x)$ et $g(x)=Q_2(x)$.

   $\alpha.P_1+\beta.Q_1\in\mathbb{R}_3[X]$ et pour tout $x\in[-1,0[$, $(\alpha.f+\beta.g)(x)=(\alpha.P_1+\beta.Q_1)(x)$.

   De même, $\alpha.P_2+\beta.Q_2\in\mathbb{R}_3[X]$ et pour tout $x\in]0,1]$, $(\alpha.f+\beta.g)(x)=(\alpha.P_1+\beta.Q_1)(x)$.

   Ceci montre que $\alpha.f+\beta.g\in\mathcal{G}$.

2.
   - Commençons par supposer que $f\in\mathcal{G}$: f est alors de classe ^{2} sur $[-1,1]$.
     - La continuité en 0 de f implique $\lim_{x\to 0^-}(f(x))=\lim_{x\to 0^+}(f(x))$, d'où $\delta_1=\delta_2$.
     - $\forall x\in[-1,0[$, $f'(x)=3\alpha_1x^2+2\beta_1x+\gamma_1$ et $\forall x\in]0,1]$, $f'(x)=3\alpha_2x^2+2\beta_2x+\gamma_2$.
       Par suite, la continuité en 0 de f' (car f est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$) implique $\gamma_1=\gamma_2$.
     - Un même argument sur la continuité de f'' en 0 donne $\beta_1=\beta_2$.

     Il en résulte qu'une condition nécessaire de l'appartenance de f à $\mathcal{G}$ est :

$$\beta_1=\beta_2,\quad \gamma_1=\gamma_2\quad\text{et}\quad\delta_1=\delta_2.$$

- Montrons que cette condition est suffisante. Supposons donc $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ et $\delta_1 = \delta_2$.
  D'après la définition de f, pour qu'elle appartienne à $\mathcal{G}$, il suffit de vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$. De plus, comme f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$, il suffit de s'intéresser à la régularité de f en 0.
  - Par définition, $f(0) = \delta_2$, f est continue à droite en 0 et comme $\lim_{x\to 0^-}(f(x)) = \delta_1 = \delta_2 = f(0)$, f est continue en 0.
  - f est continue en 0 de plus la dérivée admet en 0 la limite $\gamma_1 = \gamma_2$ (à droite et à gauche) . D'après le théorème de prolongement d'une dérivée f est dérivable en 0 , $f'(0) = \gamma_1$ et f' est continue en 0.
  - Un raisonnement similaire (à partir de f') démontre que f est deux fois dérivable en 0, que $f''(0) = 2\beta_2$, et que f'' est continue en O.

$$\boxed{\text{Finalement,}(\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2 \text{ et } \delta_1 = \delta_2) \text{ est une C.N.S. pour que } f \text{ appartienne à } \mathcal{G}}$$

.

- Montrons la liberté de la famille $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$:
  Soient α_0, α_1, α_2, α_3 et α_4 des réels tels que $\alpha_0.f_0 + \alpha_1.f_1 + \alpha_2.f_2 + \alpha_3.f_3 + \alpha_4.f_4 = 0_{\mathcal{G}}$.
  Alors pour tout $x \in [-1,0[$, $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0$, et un polynôme ayant une infinité de racines étant nul, il en résulte que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$. (cf préliminaire 2)
  Puis la relation appliquée en $x = 1$ donne $\alpha_4 = 0$.
- Montrons maintenant que $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ engendre $\mathcal{G}$:
  Soit $f \in \mathcal{G}$: $f \in \mathcal{C}^2([-1,1])$ et la restriction de f à $[-1,0[$ et $[0,1]$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 et donc d'après la question précédente, il existe des réels α_1, α_2, β, γ et δ tels que

$$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

  de façon évidente ;: $\forall x \in [-1,0[\ f(x) = \delta f_0(x) + \gamma f_1(x) + \beta f_2(x) + \alpha_1 f_3(x)$
  Si on se place sur $[0,1]$ on obtient alors :

$$\boxed{f = \delta.f_0 + \gamma.f_1 + \beta.f_2 + \alpha_1 f_3 + (\alpha_2 - \alpha_1).f_4},$$

$$\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) \text{ est une base de } \mathcal{G} \text{ qui est donc de dimension 5}}$$

Partie II

1. Un raisonnement similaire à celui utilisé pour montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([-1,1])$ permet de conclure:
   - S_{σ_n} contient la fonction nulle et est un sous ensemble de $\mathcal{C}^2([x_0, x_n])$
   - Sur chaque $]x_i, x_{i+1}[$ la combinaison linéaire de deux fonctions polynômes est un polynôme.
2. Nous avons $\sigma_1 = (x_0, x_1)$, donc $f \in S_{\sigma_1}$ signifie $f \in \mathcal{C}^2([x_0, x_1])$ et $f_{|]x_0,x_1[}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

   Dès lors, il est immédiat que S_{σ_1} est de dimension 4, $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ et $f_3 : x \mapsto x^3$ définissant une base de S_{σ_1}.
3. 1. Comme $f \in S_{\sigma_{n+1}}$, il est facile de vérifier que la restriction $f_{|[x_0,x_n]}$ appartient à S_{σ_n} (f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0, x_{n+1}]$ donc $f_{|[x_0,x_n]}$ l'est aussi sur $[x_0, x_n]$, et si $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, la restriction de $f_{|[x_0,x_n]}$ à $]x_i, x_{i+1}[$ est égale à $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$).
      Par suite, comme $(f_1, \ldots, f_d)$ est une base de S_{σ_n}, il existe un unique d-uplet de réels $(a_1, \ldots, a_d)$ tel que

$$f_{|[x_0,x_n]} = \sum_{i=1}^{d} a_i.f_i,$$

      c'est à dire tel que

$$\forall x \in [x_0, x_n], \quad f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i(x).$$

2. $F = f - \sum\limits_{i=1}^{d} a_i.\tilde{f_i}$.

D'une part, $\forall x \in [x_n, x_{n+1}]$, $F(x) = t(x) - \sum\limits_{i=1}^{d} a_i p_i(x)$, où t est le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $f_{|]x_n,x_{n+1}[} = t$ (en prolongeant par continuité l'égalité en x_n et x_{n+1}). Ceci prouve que sur $[x_n, x_{n+1}]$, F est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

D'autre part, remarquons que sur $]x_{n-1}, x_{n+1}[$, $F(x) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{d} a_i p_i(x)$, donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_{n-1}, x_{n+1}]$.
Et sur $]x_{n-1}, x_n[$, par définition des p_i et a_i, $F(x) = 0$, donc également $F'(x) = 0$ et $F''(x) = 0$.
Les continuités à gauche en x_n de F, F' et F'' montrent alors que $F(x_n) = F'(x_n) = F''(x_n) = 0$.

3. $F_{|[x_n,x_{n+1}]}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont x_n est racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 3. Par suite, sur $[x_n, x_{n+1}]$, F est nécessairement de la forme $\alpha(x - x_n)^3$.
Comme $F(x) = 0$ pour tout $x \in [x_0, x_n[$, nous avons

$$F = \alpha.\tilde{f_{d+1}},$$

d'où finalement, avec $a_{d+1} = \alpha$,

$$f = \sum_{i=1}^{d} a_i.\tilde{f_i}.$$

f est donc combinaison linéaire des $\left(\tilde{f_i}\right)$.
Il reste à montrer que ces fonctions sont dans $S_{\sigma n+1}$:

- par définition des f_i les fonctions $\tilde{f_i}$ sont C^2 sur $[x_0, x_n[$ et leur restrictions à $]x_{i,i+1}[$ est un polynôme de degré ≤ 3 pour tout $i \leq n-1$.
- la restriction de $\tilde{f_i}$ à $]x_n, x_{n+1}]$ est un polynôme de degré ≤ 3 , ce qui assure aussi que la fonction y est C^2.
- pour $i \leq d$ on a sur $]x_i, x_{n+1}]$,$\tilde{f_i} = p_i$ polynôme de degré ≤ 3 . Ce qui assure la classe C^2 en x_n
- pour $i = d+1$, on a facilement , $f_{d+1}(x_n^+) = f_{d+1}(x_n^-) = f_{d+1}(x_n) = 0$, $f'_{d+1}(x_n^+) = f'_{d+1}(x_n^-) = 0$, $f"_{d+1}(x_n^+) = f"_{d+1}(x_n^-) = 0$

Il en résulte que $\underline{\tilde{f_0}, \ldots, \tilde{f_{d+1}} \text{ engendre } S_{\sigma_{n+1}}}$
Reste à prouve que cette famille est libre : Soit la combinaison linéaire :

$$\sum_{i=0}^{d+1} \lambda_i \tilde{f_i} = 0$$

sur $[x_0, x_n]$ on a $\sum \lambda_i f_i =$, donc $\forall i \leq$, $\lambda_i = 0$ car la famille (f_i) est libre dans S_{σ_n} . Sur $[x_n, x_{n+1}]$ il reste alors $\lambda_{d+1} (x - x_n)^3 = 0$ donc $\lambda_{d+1} = 0$

$$\boxed{\text{la famille } \left(\tilde{f_i}\right)_{i=1}^{d+1} \text{ est une base de } S_{\sigma_{n+1}}}$$

4. L'étude précédente montre que pour tout entier $n \geq 1$, si S_{σ_n} est un espace vectoriel de dimension finie, $S_{\sigma_{n+1}}$ est également de dimension finie et $\dim(S_{\sigma_{n+1}}) = \dim(S_{\sigma_n}) + 1$.
Une récurrence immédiate sur l'entier $n \geq 1$, utilisant le fait que S_{σ_1} est de dimension finie égale à 4, montre :

$$\boxed{\forall\ n \geq 1,\ S_{\sigma_n} \text{ est de dimension finie égale à } n+3.}$$

4. 1. Choisissons une base adaptée au problème de $\mathbb{R}_3[X]$. Par exemple $\left(1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3\right)$. C'est une famille étagée en degré donc une base. Tout polynôme se décompose dans cette base sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1(X-a) + a_2\,(X-a)^2 + a_3\,(X-a)^3$$

Le système imposé aux (a_i) est alors :

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta, 2a_2 = \gamma, (b-a)^3\, a_3 = -a_0 - a_1(b-a) - a_2(b-a)^2$$

qui admet une unique solution de façon évidente car $a \neq b$

2. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $(n+3)$-uplet de réels $(y_0, \ldots, y_n, \alpha, \beta)$, il existe une unique fonction spline $f \in S_{\sigma_n}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad & f(x_i) = y_i, \\ & f'(x_0 = \alpha, \\ & f''(x_0) = \beta. \end{aligned}$$

- $n=1$: soit $(y_0, y_1, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$.
D'après la question précédente, il existe un unique polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 tel que $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, $f'(x_0)=\alpha$ et $f''(x_0)=\beta$, ce qui répond exactement à la question.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie jusqu'à n. Soient $(y_0, \ldots, y_{n+1}, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+4}$.
Par hypothèse de récurrence, il existe une unique fonction $f \in S_{\sigma_n}$ telle que

$$f(x_0)=y_0, \ldots, f(x_n)=y_n, f'(x_0)=\alpha \text{ et } f''(x_0)=\beta.$$

Dès lors, une fonction $\tilde{f} \in S_{\sigma_{n+1}}$ vérifiant les conditions recherchées est du type :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [x_0, x_n] \\ & \\ p(x) & \text{si } x \in]x_n, x_{n+1}] \quad \text{avec } p \in \mathbb{R}_3[X] \quad \text{et } \begin{cases} p(x_n)=y_n \\ p'(x_n)=f'(x_n) \\ p''(x_n)=f''(x_n) \\ p(x_{n+1})=y_{n+1}. \end{cases} \\ & \end{cases}$$

Par suite, l'existence et l'unicité de $\tilde{f}$ est équivalente à celle du polynôme p, et donc résulte cette fois encore de la question 4a

$\boxed{\text{il existe une unique fonction spine vérifiant les conditions } f(x_i)=y' \text{ , } f\prime(x_0)=\alpha, f''(x_0)=\beta}$

3. Montrons que $S^0_{\sigma_n}$ est un sous-espace vectoriel de S_{σ_n}.
$0_{S_{\sigma_n}} = 0_{\mathcal{C}^2([x_0,x_n])} \in S^0_{\sigma_n}$ donc $S^0_{\sigma_n} \neq \emptyset$ et $S^0_{\sigma_n} \subset S_{\sigma_n}$
Soient $f, g \in S^0_{\sigma_n}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $(\alpha.f + \beta.g)(x_i) = \alpha f(x_i) + \beta g(x_i) = 0$. Donc $\alpha.f + \beta.g \in S^0_{\sigma_n}$.
Choisissons les fonctions f_1 et f_2 de $S^0_{\sigma_n}$ comme les seules fonctions de S_{σ_n} telles que

$$\begin{array}{lllll} \forall i \in \{0,\ldots,n\}, & f_1(x_i)=0, & {f_1}'(x_0)=1 & \text{et} & {f_1}''(x_0)=0; \\ \forall i \in \{0,\ldots,n\}, & f_2(x_i)=0, & {f_2}'(x_0)=1 & \text{et} & {f_2}''(x_0)=1. \end{array}$$

Soient α et β des réels tels que $h = \alpha.f_1 + \beta.f_2 = 0$
Alors $h'(x_0) = 0 = \alpha$ et $h''(x_0) = 0 = \beta$. Ce qui prouve que la famille (f_1, f_2) est libre.
Soit $h \in S^0_{\sigma_n}$. Posons $\alpha = h'(x_0)$ et $\beta = h''(x_0)$. Remarquons alors que $\alpha.f_1 + \beta.f_2$ et h appartiennent à S_{σ_n} et que

$$\forall i \in \{0,\ldots,n\}, \quad (\alpha.f_1 + \beta.f_2)(x_i) = 0 = h(x_i),$$

$$(\alpha.f_1 + \beta.f_2)'(x_0) = h'(x_0) \quad \text{et} \quad (\alpha.f_1 + \beta.f_2)''(x_0) = h''(x_0).$$

L'unicité démontrée à la question 4b implique que $h = \alpha.f_1 + \beta.f_2$. Ce qui prouve que (f_1, f_2) engendre $S^0_{\sigma_n}$.
Finalement, (f_1, f_2) est une base de $S^0_{\sigma_n}$, et par suite, $\boxed{\dim(S^0_{\sigma_n}) = 2}$
Faute plan possible : Soit $\phi : S_{\sigma_n} \to \mathbb{R}^{n+1} : f \mapsto (f(x_i))_{i=0}^n$, ϕ est un application linéaire de noyau $S^0_{\sigma_n}$.Or ϕ est surjective car pour tout $(y_i)_{i=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1}$ il existe une fonction $f \in S_{\sigma_n}$ telle que $\phi(f) = (y_i)$:il suffi de prendre $\alpha = \beta = 0$ dans la question 4b

5.

1. Sur $]x_i, x_{i+1}[$, $f = p_i$, où p_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, et que pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $f^{(4)}(x) = {p_i}^{(4)}(x) = 0$.
2. Par intégration par parties :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 dx = [f'f'']_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x) f^{(3)}(x) dx,$$

les fonctions f' et f'' étant continue C^1 par morceaux sur $[x_i, x_{i+1}]$.
La fonction $f^{(3)}$ étant constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ peut y être prolongé par continuité .
une seconde intégration par parties donne alors

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 dx = [f'(x)f''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - [f(x)f'''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) f^{(4)}(x) dx,$$

les fonctions f' et $f^{(3)}$ (prolongés) étant C^1 sur $[x_i, x_{i+1}]$
soit, comme $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$ et comme $f^{(4)} = 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 dx = [f'(x)f''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} = f'(x_{i+1})f''(x_{i+1}) - f'(x_i)f''(x_i).$$

Et par la relation de Chasles

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} (f'(x_{i+1})f''(x_{i+1}) - f'(x_i)f''(x_i)),$$

nous en déduisons par télescopage:

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 dx = f'(x_n)f''(x_n) - f'(x_0)f''(x_0)}$$

Remarque : le calcul ne peut pas se faire directement sur $[x_0, x_n]$ car $f^{(3)}$ n'est pas continue,C^1_{pm} sur ce segment , et ne peut pas y être prolongé en une telle fonction. (l'hypothèse $f(x_0) = f(x_n) = 0$ suffirait d'ailleurs si une telle I.P.P. était possible)

3. L'application ϕ est linéaire.
   Montrons que ϕ est injective :
   Soit $g \in \ker(\phi)$. C'est à dire $g \in S^0_{\sigma_n}$ telle que $\phi(g) = (0,0)$.
   Cela signifie que $g'(x_0) = g'(x_n) = 0$. D'après 5b,

$$\int_{x_0}^{x_n} (g''(x))^2 dx = g'(x_n)g''(x_n) - g'(x_0)g''(x_0) = 0.$$

   Or l'application $x \mapsto (g''(x))^2$ est continue et positive sur $[x_0, x_n]$,
   donc $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\varphi''(x) = 0$. φ' est constante sur $[x_0, x_n]$ et comme $\varphi'(x_0) = 0$, $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\varphi'(x) = 0$. φ est donc constante sur $[x_0, x_n]$, et comme $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi = 0$.
   ϕ est une injection de $S^0_{\sigma_n}$ dans $\mathbb{R}^2$. D'après 4c, $\dim(S^0_{\sigma_n}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc
   $\boxed{\phi \text{ est une bijection de } S^0_{\sigma_n} \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

   - Démontrons d'abord l'unicité d'une telle fonction spline :
     Soient f et g deux fonctions splines de S_{σ_n} vérifiant les conditions de l'énoncé.
     Il est immédiat que $f - g \in S^0_{\sigma_n}$ et de plus, $(f-g)'(x_0) = 0$ et $(f-g)'(x_n) = 0$. Donc $f - g \in \ker(\phi)$. 5c montre qu'alors $f - g = 0_{S^0_{\sigma_n}}$ d'où $f = g$.
   - Établissons maintenant l'existence de la fonction spline f.
     Notons g l'unique fonction de S_{σ_n} (c.f. 4b) telle que

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, g(x_i) = y_i, \text{ et } g'(x_0) = 0 = g''(x_0).$$

     Notons h l'unique antécédent de (α, β) par ϕ : $h \in S^0_{\sigma_n} \subset S_{\sigma_n}$ et $h'(x_0) = \alpha$, $h'(x_n) = \beta$.
   - Posons $f = h + g$: $f \in S_{\sigma_n}$ (car S_{σ_n} est un espace vectoriel) et f vérifie bien les $n+3$ conditions recherchées.

$$\boxed{\text{il existe une unique fonction spine vérifiant les conditions } f(x_i) = y' \text{ , } f\prime(x_0) = \alpha, f'(x_n) = \beta}$$

Partie III

1. 1. Par construction,
      - g est 2-périodique,
      - continue sur $\mathbb{R}$ car continue si $x \in]0, 1[$ et $x \in] - 1n, 0$,continue en 0 (car $f(0^+) = 0$ et $f(0^-) = -f(0) = 0$) continue en 1 (car $f(1^-) = 0$ et $f(1^+) = f(-1^+) = -f(1^-) = 0$)
      - de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$,
      - donc le théorème de Dirichlet assure la convergence, pour tout réel x, de la série de Fourier de g en x vers $g(x)$.

      De plus, g est impaire, donc les seuls coefficients de Fourier non nuls de g sont ceux "en sinus". En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \int_{-1}^{1} g(t)\sin(\pi nt)dt = 2\int_0^1 g(t)\sin(\pi nt)dt$, nous obtenons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\pi nx).$$

   2. Remarquons que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
      Comme g, g'' est impaire. Sa série de Fourier est donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(g'')(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\pi nx),$$

      où pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = c_n = 2\int_0^1 g''(t)\sin(\pi nt)dt$.
      Comme g'' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, ni de classe $\mathcal{C}^1$, g'' n'a a priori aucune raison d'être égale à sa série de Fourier.

3. Par contre,g étant continue par morceaux, la formule de Parseval s'applique pour g'' et donne :

$$\int_0^1 (g''(x))^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (g''(x))^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {d_n}^2. \qquad (1)$$

Et une double intégration par parties permet de calculer d_n en fonction de c_n (en utilisant $g(0) = g(1) = 0$) :

$$\begin{array}{rcl} d_n &=& 2\int_0^1 g''(t)\sin(\pi nt)\,dt \\ &=& 2([g'(t)\sin(\pi nt)]_0^1 - n\pi\int_0^1 g'(t)\cos(\pi nt)dt) \\ &=& -2n\pi([g(t)\cos(\pi nt)]_0^1 + n\pi\int_0^1 g(t)\sin(\pi nt)dt) \\ &=& -(n\pi)^2 c_n \end{array}$$

Et, comme $\forall x \in]0,1[, g(x) = f(x)$, nous avons également $\forall x \in]0,1[, g''(x) = f''(x)$, donc l'équation (1) donne

$$\int_0^1 (f''(x))^2 dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\pi^4 {c_n}^2 = \frac{\pi^4}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {c_n}^2 n^4 \qquad (2)$$

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs $(a_1, \ldots, a_N)$ et $(b_1, \ldots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$, muni du produit scalaire canonique :

$$\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^N {a_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N {b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux séries de droite convergeant par hypothèse, nous obtenons que la suite de terme général $\sum\limits_{n=1}^N |a_n b_n|$ est croissante et majorée :

$$\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où la convergence absolue de la série $\sum a_n b_n$, et la majoration recherchée.

5. Les deux séries à termes réels $\sum (c_n n^2)^2$ (par Bessel-Parseval sur g'') et $\sum (\frac{1}{n^2})^2$ convergent. D'après 1d, il en résulte que la série $\sum(c_n n^2 \times \frac{1}{n^2})$ converge absolument et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} {c_n}^2 n^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci prouve, comme $\forall x \in [0,1]$, $|c_n \sin(\pi nx)| \leq |c_n|$, la convergence absolue de la série de Fourier de f vers $f(x)$ et, à l'aide de l'équation (2), nous obtenons :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\int_0^1 (f''(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

soit

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \parallel f \parallel \qquad (3)$$

2.

1. $g_i : t \mapsto (f - \varphi)(x_i + th_i)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ (car f, φ, ainsi que l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$, $t \mapsto (x_i + th_i)$ le sont). Et le théorème de dérivation des fonctions composées montre que $\forall t \in [0,1]$, ${g_i}''(t) = {h_i}^2(f-\varphi)''(x_i + th_i)$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \parallel g_i \parallel^2 &=& \int_0^1 {h_i}^4[(f-\varphi)''(x_i + th_i)]^2 dt \\ &=& {h_i}^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(f-\varphi)''(u)]^2 \frac{1}{h_i} du \quad \text{(changement de variable } C^1 : u = x_i + th_i) \\ &\leq& {h_i}^3 \parallel f - \varphi \parallel^2. \end{array}$$

L'équation (3) s'applique bien à g_i et donne

$$\forall t \in [0,1], \quad |g_i(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \parallel g_i \parallel \leq {h_i}^{\frac{3}{2}} \frac{\parallel f - \varphi \parallel}{3\sqrt{5}},$$

soit, en passant au sup,

$$\sup_{t\in[0,1]} |g_i(t)| \leq \left({h_i}^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\parallel f - \varphi \parallel}{3\sqrt{5}}.$$

Enfin, il suffit de remarquer que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |g_i(t)| = \sup\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \varphi(x)|$ pour conclure.

2. Si on reprend l'idée du II5b on calcule, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, à l'aide d'intégrations par parties successives (possibles car φ est une fonction spline, donc peut être considérée comme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ après prolongement en x_i et x_{i+1}) :

$$\begin{aligned}
&\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t) - \varphi''(t))\varphi''(t)dt \\
&= [(f'(t) - \varphi'(t)\varphi''(t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t) - \varphi'(t))\varphi'''(t)dt \\
&= (f'(x_{i+1}) - \varphi'(x_{i+1})\varphi''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - \varphi'(x_i)\varphi''(x_i) \\
&\quad - \underbrace{[(f(t) - \varphi(t)\varphi'''(t)]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{=0 \text{ car } \varphi(x_k)=f(x_k), \forall k} + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - \varphi(t))\varphi^{(4)}(t)dt}_{=0 \text{ car } \varphi^{(4)}=0 \text{ sur }]0,1[} \\
&= (f'(x_{i+1}) - \varphi'(x_{i+1}))\varphi''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - \varphi'(x_i))\varphi''(x_i)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la norme de $f - \varphi$:

$$\begin{aligned}
&\| f - \varphi \|^2 \\
&= \int_0^1 [(f - \varphi)''(t)]^2 dt \\
&= \int_0^1 [(f''(t))^2 - 2f''(t)\varphi''(t) + (\varphi''(t))^2] dt \\
&= \int_0^1 (f''(t))^2 dt - 2\int_0^1 (f''(t) - \varphi''(t))\varphi''(t)dt - \int_0^1 (\varphi''(t))^2 dt \\
&= \| f \|^2 - \| \varphi \|^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t) - \varphi''(t))\varphi''(t)dt \\
&= \| f \|^2 - \| \varphi \|^2 \\
&\quad -2\sum_{i=0}^{n-1} [(f'(x_{i+1}) - \varphi'(x_{i+1}))\varphi''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - \varphi'(x_i))\varphi''(x_i)] \\
&= \| f \|^2 - \| \varphi \|^2 \\
&\quad -2\underbrace{[(f'(x_n) - \varphi'(x_n))\varphi''(x_n) - (f'(x_0) - \varphi'(x_0))\varphi''(x_0)]}_{=0 \text{ car } x_0=0, x_n=1 \text{ et } \varphi'(0)=f'(0), \varphi'(1)=f'(1)} \\
&= \| f \|^2 - \| \varphi \|^2.
\end{aligned}$$

3. L'égalité précédente donne immédiatement

$$\| f - \varphi \|^2 \leq \| f \|^2.$$

Et donc pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, la question 2a montre que

$$\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \left(h_i^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\| f \|}{3\sqrt{5}} \leq \left(h^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\| f \|}{3\sqrt{5}}. \qquad (4)$$

Soit $x \in [0, 1]$.
Comme σ est une subdivision de $[0, 1]$, $\exists i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$, donc $|f(x) - \varphi(x)| \leq \sup_{u \in [x_i, x_{i+1}]} |f(u) - \varphi(u)|$, d'où, d'après l'équation (4),

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \left(h^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\| f \|}{3\sqrt{5}}.$$

Ce résultat étant valable $\forall x \in [0, 1]$, nous avons démontré que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \left(h^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\| f \|}{3\sqrt{5}}.$$