PRELIMINAIRES

- On notera qu'il est dit dans la troisième partie que $N_1(f) \leq 2N_2(f)$, ce qui donne un contrôle (très partiel) des calculs des deux premières parties.
- Dans tout le problème je note ϕ les fonctions auxiliaires introduites .
- J'utilise régulièrement la propriété: Si ϕ est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, si ϕ se prolonge par continuité en 0 et si $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\phi(t)\right) = L \in \mathbb{R}$ alors ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. En effet les deux premières hypothèses assurent l'intégrabilité sur $]0,1]$ alors que la première et la troisième l'assure sur $[1,+\infty[$.
- De même si ϕ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et si $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\phi(t)\right) = L \in \mathbb{R}$ alors ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

PARTIE I - Exemple 1

1)
La fonction arctan est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, elle vérifie $\arctan(0) = 0$, donc f est dans E_0.
Par ailleurs l'application $\phi : \forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $\phi(t) = \frac{\arctan(t)^2}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car

- elle est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$
- elle se prolonge par continuité en 0 en posant $\phi(0) = 1$;
- $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\phi(t)\right) = \frac{\pi^2}{4}$

Donc :

$$\boxed{f \text{ appartient à } E_1}$$

2)

- La fonction H_x est continue positive sur $\mathbb{R}^+$,
- $\lim_{t\to+\infty}(t^2 H_x(t)) = 0$.

donc H_x est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On remarque que $(f'(t))^2 = \frac{1}{(1+t^2)^2} = H_1(t)$ et donc :

$$\boxed{f \in E_2}$$

3.1)
On écrit $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \phi(x,t)dt$ avec : $\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^+ \quad \phi(x,t) \mapsto \frac{1}{(t^2+1)(t^2+x^2)}$. (le dénominateur est non nul car $x > 0$)

- pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ la fonction $t \to \phi(x,t)$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ la fonction $x \to \phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
- On a la domination sur tout segment $[a,b] \subset !\mathbb{R}^{+*}$:

$$\forall\,(x,t) \in [a,b]\times\mathbb{R}^+ \quad \phi(x,t) \leq \frac{1}{a^2+t^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{indépendant de } x \\ \quad \text{continue intégrable sur } \mathbb{R}^+ \text{ (fonction continue , positive sur } \mathbb{R}^+ \text{ car } a>0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } \lim\left(t^2\frac{1}{a^2+t^2}\right) = 1 \text{)} \end{array} \right.$$

d'où par théorème sur les intégrales à paramètres :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^{+*}}$$

3.2)

$$\frac{1}{(T+1)(T+x^2)} = \frac{1}{1-x^2}\Big[\frac{-1}{T+1} + \frac{1}{T+x^2}\Big].$$

3.3) D'où

$$\begin{aligned} \int_0^X \frac{1}{1-x^2}\Big[\frac{-1}{t^2+1} + \frac{1}{t^2+x^2}\Big]dt &= \frac{1}{x^2-1}\Big[\int_0^X \frac{dt}{t^2+1} - \int_0^X \frac{dt}{t^2+x^2}\Big] \\ &= \frac{1}{x^2-1}\left(\arctan(X) - \frac{1}{x}\arctan\left(\frac{X}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

comme $x > 0$ on a par passage à la limite : $\varphi(x) = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{2x(x+1)}$.

$$\boxed{\forall x>0, x\neq 1 : \varphi(x)=\frac{\pi}{2x(x+1)}}$$

3.4)
$(N_2(f))^2=\int_{\mathbb{R}^+}(f'(t))^2dt=\int_{\mathbb{R}^+}H_1(t)dt=\varphi(1)$.
Or φ est continue d'après 3.1 donc par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\boxed{N_2(f)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4) En posant $\phi(u)=u-\arctan u$ on a : $\phi'(u)=1-\frac{1}{1+u^2}=\frac{u^2}{1+u^2}\geq 0$.
Donc ϕ est croissante et comme $\phi(0)=0$ on obtient :

$$\boxed{\forall u\in\mathbb{R}^+,\quad u-\arctan u>0}$$

5)

- La fonction G_x est continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$
- elle se prolonge par continuité en $t=0$ par $G_x(0)=x$ et
- $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2G_x(t)\right)=0$

donc :

$$\boxed{G_x \text{ est intégrable } \mathbb{R}^{+*}}$$

6.1)
soit ϕ :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*},\quad \phi(x,t)=\frac{\arctan(xt)}{t(t^2+1)}$$

- pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $t\to\phi(x,t)$ est continue , intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$
- pour tout $t\in\mathbb{R}^{+*}$, $t\to\phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- On a d'après la question 4 la domination sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^+$: $\phi(x,t)\leq\frac{b}{(t^2+1)}\left\{\begin{array}{c}\text{indépendant de } x\\ \text{continue intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}\end{array}\right.$

Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramétres s'applique et donne la continuité de θ sur tout intervalle $[a,b]$ donc sur $\mathbb{R}^+$.

6.2)
De plus $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{(t^2+1)(1+t^2x^2)}$ et

- pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $t\to\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)$ est continue , intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car continue sur $\mathbb{R}^+$, positive et $\lim_{+\infty}\left(t^2\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\right)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x>0\\ 1 \text{ si } x=0\end{array}\right.$
- pour tout $t\in\mathbb{R}^{+*}$, $x\to\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- On a la domination sur $\mathbb{R}^+$: $\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)\leq\frac{1}{t^2+1}\left\{\begin{array}{c}\text{indépendant de } x\\ \text{continue intégrable sur } \mathbb{R}^{+*}\end{array}\right.$

donc d'après le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre on a :

$$\boxed{\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

6.3)
De plus avec le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad \theta'(x)=\int_{\mathbb{R}^{+*}}\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}dt.$$

Pour $x\neq 0$ et $x\neq 1$

$$\begin{aligned}\theta'(x) &= \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(\frac{1}{x^2}+t^2)}dt=\frac{1}{x^2}\frac{\pi}{2}\frac{1}{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)} \text{ d'après 3.3}\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

Pour $x=0$ et $x=1$ le résultat reste vrai par continuité (θ' est continue sur $\mathbb{R}^+$, ainsi que $x \to \frac{\pi}{2}\frac{1}{x+1}$

On peut aussi calculer la primitive par décomposition en éléments simples.

6.4)

Comme θ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ on a : $\theta(x) = \theta(0) + \int_0^x \theta'(t)dt = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$.

$$\boxed{\theta(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)}$$

6.5)

$(N_1(f))^2 = \int_0^{+\infty} (\frac{\arctan t}{t})^2 dt$ et $\theta(1) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt$.

On intègre par parties sur un segment $[1, X]$ avec les fonctions C^1 : $u = \arctan(t^2)$, $v = -1/t$

$$\begin{aligned}\int_1^X (\frac{\arctan t}{t})^2 dt &= \left[-\frac{\arctan(t)^2}{t}\right]_1^X + \int_1^X \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt \\ &= -2\frac{\arctan(X)}{X(X^2+1)} + \frac{\pi^2}{16} + \int_1^X \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt\end{aligned}$$

et le passage à la limite quand $X \to +\infty$ (possible car les intégrales impropres convergent) donne :

$$\int_1^{+\infty} (\frac{\arctan t}{t})^2 dt = \frac{\pi^2}{16} + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt$$

et de même sur $[X, 1]$

$$\begin{aligned}\int_X^1 (\frac{\arctan t}{t})^2 dt &= \left[-\frac{\arctan(t)^2}{t}\right]_X^1 + \int_X^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt \\ &= 2\frac{\arctan(X)^2}{X(X^2+1)} - \frac{\pi^2}{16} + \int_1^X \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt\end{aligned}$$

et le passage à la limite quand $X \to 0$ donne en utilisant $\arctan(X) \sim_0 X$:

$$\int_0^1 (\frac{\arctan t}{t})^2 dt = -\frac{\pi^2}{16} + \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2}\frac{1}{t}dt$$

d'où :

$$(N_1(f))^2 = 2\theta(1).$$

6.6) et donc :

$$\boxed{N_1(f) = \sqrt{\pi \ln 2} \text{ et } \frac{N_1(f)}{N_2(f)} = 2\sqrt{\ln 2}}$$

remarque :$2\sqrt{\ln 2} \leq 2$ *car* $\ln(2) \leq 1$

PARTIE II - Exemple 2

1)

- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $f'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.On a donc $f(t) = \arg sh(t)$. (la fonction $\arg sh$ n'est pas au programme en 2004)
- f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$ donc f est dans E_0
- De plus $(f'(t))^2 = \frac{1}{t^2+1}$ ce qui montre que f'^2 est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\boxed{f \in E_2.}$

  $(N_2(f))^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\boxed{N_2(f) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

2)

- Quand t tend vers 0 :

$$f(t) = \arg sh(t) \sim t.$$

- Quand t tend vers $+\infty$:

$$f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln t + \ln(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}) \sim \ln t$$

car $\ln t$ tend vers $+\infty$ tandis que $\ln(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}})$ tend vers $\ln 2 \ll \ln(t)$

ou en utilisant $u = \arg sh(t)$ *on a* $t = sh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \sim \frac{e^u}{2}$ *donc* $u \sim \ln(2t) = \ln(t) + \ln(2) \sim \ln(t)$

3)

- f est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) = 0$.
- La fonction $\phi(t) = (\frac{f(t)}{t})^2$
  - est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$;
  - est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1 d'après la question précédente;
  - $t^{3/2}\phi(t) = \frac{\arg sh(t)^2}{\sqrt{t}} \sim_{+\infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^{1/4}}\right)^2$ de limite nulle avec $3/2 > 1$

donc ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Tout ceci montre

$$\boxed{f \in E_1}$$

4.1)

- La fonction $\phi(t) = \frac{-\ln t}{1-t^2}$ est continue positive sur $]0,1[$.
- Quand $t \to 1$, $\phi(t) = \frac{-\ln t}{(1-t)(1+t)} \sim \frac{1}{1+t} \to \frac{1}{2}$ donc la fonction est prolongeable par continuité et donc elle est intégrable sur $[1/2, 1[$
- Quand $t \to 0$, $\quad \phi(t) \sim -\ln t$ intégrable sur $]0, 1/2]$

donc ϕ est intégrable sur $]0,1[$.
4.2) soit $\phi_k(t) = -t^{2k}\ln(t)$
pour $k = 0$: $-\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$
pour $k \geq 1$:

- l'application ϕ_k est continue positive sur $]0,1]$.
- la fonction est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'application ϕ_k est intégrable sur $]0,1]$ donc sur $]0,1[$.
On intègre par parties sur $[X,1]$:

$$\int_X^1 t^{2k}\ln t dt = \Big[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\ln t\Big]_X^1 - \frac{1}{2k+1}\int_X^1 t^{2k}dt = \frac{-X^{2k+1}}{2k+1}\ln X - \frac{1}{(2k+1)^2}\left[1 - X^{2k+1}\right]$$

et on peut faire tendre X vers 0 l'intégrale impropre étant convergente

$$J_k = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

4.3) Il s'agit de justifier l'intégration terme à terme.

- Les fonctions ϕ_k sont continues intégrables sur $]0,1[$
- la série $\sum \phi_k$ converge (série géométrique de raison $x^2 \in]0,1[$)
- la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k(x) = \frac{-\ln(x)}{1-x^2}$ est continue sur $]0,1[$
- la série$\sum \int_{]0,1[} \left|-t^{2k}\ln t\right| dt$ converge : en effet la série $\sum \int_{]0,1[} \left|-t^{2k}\ln t\right| dt = \sum J_k = \sum \frac{1}{(2k+1)^2}$, séries à termes positifs avec $k^2\frac{1}{(2k+1)^2} \to \frac{1}{4}$

Le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions donne que ϕ est intégrable sur $]0,1[$ (on le sait déjà) et que :

$$\int_{]0,1[} \phi = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{]0,1[} \phi_k$$

soit :

$$J = \sum_{k=0}^{+\infty} J_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

pour calculer cette somme on part de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on sépare les termes pairs et les termes impairs.

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = J + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}$$

on obtient :

$$\boxed{J = \frac{\pi^2}{8}}$$

5.1)
$I = (N_1(f))^2 = \int_{\mathbb{R}^{+*}} f^2(t)\, \frac{1}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \arg sh(t)^2\, \frac{1}{t^2} dt$.
Intégrons par parties comme au I.6.5 :

$$\begin{aligned}
\int_1^X \arg sh(t)^2\, \frac{1}{t^2} dt &= \left[\frac{-\arg sh(t)^2}{t}\right]_1^X + 2\int_1^X \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \\
&= \arg sh(1) - \frac{\arg sh(X)^2}{X} + 2\int_1^X \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt
\end{aligned}$$

on peut faire tendre X vers $+\infty$ car

- $\frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ comme fonction continue , positive , telle que $t^{3/2}\frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} = \frac{\arg sh(t)}{\sqrt{1/t+t}} \sim \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ a une limite nulle .
- $\frac{\arg sh(X)^2}{X} \sim \left(\frac{\ln(X)}{X^{1/2}}\right)^2$ a une limite nulle si X tend vers $+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \arg sh(t)^2\, \frac{1}{t^2} dt = \arg sh(1) + 2\int_1^{\infty} \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

et de même:

$$\begin{aligned}
\int_X^1 \arg sh(t)^2\, \frac{1}{t^2} dt &= \left[\frac{-\arg sh(t)^2}{t}\right]_X^1 + 2\int_X^1 \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt \\
&= -\left(\arg sh(1)\right)^2 + \frac{\arg sh(X)^2}{X} + 2\int_X^1 \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt
\end{aligned}$$

on peut faire tendre X vers 0 car :

- $\frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ comme fonction continue , positive , prolongeable par continuité en 0 par 1
- $\frac{\arg sh(X)^2}{X} \sim X$ a une limite nulle si X tend vers 0 :

$$\int_0^1 \arg sh(t)^2\, \frac{1}{t^2} dt = -\left(\arg sh(1)\right)^2 + 2\int_0^1 \frac{\arg sh(t)}{t\sqrt{1+t^2}} dt$$

ce qui donne le résultat demandé :

$$\boxed{I = 2\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t\sqrt{t^2+1}} dt}$$

5.2)
$f'(t) = \frac{1}{t^2+1} > 0$ et f admet 0 pour limite en 0 et $+\infty$ pour limite en $+\infty$ ce qui montre que f réalise un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.
On peut donc faire le changement de variable :

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = 2\int_0^{+\infty} \frac{u}{sh(u)}du.$$

D'autre part, l'application $u \mapsto e^{-u}$ réalise un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur $]0,1[$, ce qui justifie le changement de variable $v = e^u$:

$$I = 2\int_0^{+\infty} \frac{u}{shu}du = 4\int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - e^{-u}}du = 4\int_0^1 \frac{-\ln v}{\frac{1}{v} - v}\frac{dv}{v} = 4J = \frac{\pi^2}{2}.$$

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{2}}$$

5.3)

$$\boxed{N_1(f) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ et } \frac{N_1(f)}{N_2(f)} = \sqrt{\pi}.}$$

PARTIE III

1.1)
$h(t) = \frac{f(t)-f(0)}{t-0}$. Comme f est dérivable en 0 de dérivée α d'où $\boxed{\lim_{t\to 0^+} h(t) = \alpha}$
$g(t) = \sqrt{t}h(t)$ donc $\boxed{\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0}$
1.2)
$g'(t) = \frac{f'(t)\sqrt{t} - f(t)\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}$ donc $\sqrt{t}g'(t) = f'(t) - \frac{f(t)}{2t}$ soit $f'(t) - \sqrt{t}g'(t) = \frac{1}{2}h(t)$.
1.3)
$\sqrt{t}g'(t) = f'(t) - \frac{1}{2}h(t)$ or f est de classe C^1 donc $\lim_{t\to 0^+} f'(t) = \alpha$ et on sait $\lim_{t\to 0^+}(h(t)) = \alpha$

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}g'(t) = \frac{\alpha}{2}}$$

et comme $g(t)$ tend vers 0

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} g(t)g'(t) = 0}$$

1.4)

- f étant C^1 sur $[0,x]$, l'application f'^2 est continue sur $[0,x]$ donc intégrable.
- $t \mapsto (\sqrt{t}g'(t))^2$ et $t \mapsto (h(t))^2$ sont prolongeable par continuité en 0 d'après les questions précédentes
- $f'(t) = \sqrt{t}g'(t) + \frac{1}{2}h(t)$ donne après prolongement par continuité en 0 .

$$\begin{aligned}\int_0^x (f'(t))^2dt &= \int_0^x \left[(\sqrt{t}g'(t))^2 + \frac{1}{4}(h(t))^2 + \sqrt{t}g'(t)h(t)\right]dt = \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2dt + \int_0^x \frac{1}{4}(h(t))^2dt + \int_0^x g'(t)g(t)dt \\ &= \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2dt + \int_0^x \frac{1}{4}(h(t))^2dt + \int_0^x g'(t)g(t)dt + \frac{1}{2}g(x)^2 \text{ car } g(0) = \lim_{t\to 0} g(t) = 0\end{aligned}$$

c'est la relation (R)

$$\boxed{\int_0^x (f')^2 = \int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2dt + \frac{1}{4}\int_0^x (h(t))^2dt + \frac{1}{2}(g(x))^2}$$

2.1)
Soit $f \in E_1$. Montrer que $f \in E_1$ revient à montrer que h^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Comme $h^2 \geq 0$ cela revient encore à montrer que l'application $x \mapsto \int_0^x h^2$ est majorée (car elle est croissante et que pour une fonction positive l'intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale impropre)
Or, d'après (R) on a :

$$\int_0^x h^2 \leq 4\int_0^x f'^2 \leq 4\int_0^{+\infty} f'^2$$

ce qui donne la majoration. Donc $f \in E_1$. Et donc

$$\boxed{E_2 \subset E_1}$$

2.2)
D'une part $\phi(t) = (\frac{\sin t}{t})^2$ est continue positive sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1, et $t^{3/2}\phi(t)$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$: elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$. Comme $\sin \in E_0$ on obtient que $\sin \in E_1$.
D'autre part $\int_0^{n\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{n\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{n\pi}{2} \to +\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ diverge et donc $\sin \notin E_2$.

$$\boxed{E_1 \text{ n'est pas inclus dans } E_2}$$

3.1) On procède comme pour les fonctions de carré intégrable en utilisant que pour (a,b) réels $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

- E_2 est inclus dans E_0 par définition
- E_2 est non vide (cf exemples du I et du II)
- E_2 est stable par addition : Si f et g sont dans E_2 $(f'+g')^2$ est continue positive sur $\mathbb{R}^+$ et $(f'+g')^2 = f'^2+g'^2+2f'g' \leq 2(f'^2+g'^2)$. donc par majoration $(f'+g')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- E_2 est stable par produit externe : si f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $\left((\lambda f)'\right)^2 = \lambda^2 f'^2$ l'est aussi.

$$\boxed{E_2 \text{ est un sous espace vectoriel de } E_1}$$

3.2)
Au 2.1 on a vu $\forall x>0,\quad \int_0^x (\frac{f(t)}{t})^2 dt \leq 4\int_0^{+\infty}(f'(t))^2 dt$
et en faisant tendre x vers $+\infty$ cela donne :

$$(N_1(f))^2 \leq 4(N_2(f))^2$$

d'où encore :

$$\boxed{N_1(f) \leq 2N_2(f)}$$

3.3)
On a bien $f_n(0)=0$ et f_n de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
De plus $f_n'(t) = e^{-t}(-\sin nt + n\cos nt)$ donc

$$\begin{aligned}(f_n'(t))^2 &= e^{-2t}(\sin^2 nt + n^2\cos^2 nt - n\sin 2nt) = e^{-2t}(\frac{1}{2}(1-\cos 2nt) + \frac{n^2}{2}(1+\cos nt) - n\sin 2nt) \\ &= \frac{n^2+1}{2}e^{-2t} + \frac{n^2-1}{2}e^{-2t}\cos(2nt) - ne^{-2t}\sin(2nt)\end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales , on passe par les complexes :

$$\int_0^X e^{-2t}e^{2int}dt = \left[\frac{e^{-2t+2int}}{-2+2in}\right]_0^X = \frac{1-e^{-2X}e^{2inX}}{2-2in} \longrightarrow_{X\to+\infty} \frac{1}{2(1-in)} = \frac{1+in}{2(1+n^2)}$$

car $\left|e^{-2X}e^{2inX}\right| = e^{-2X}$
ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos 2nt dt = \frac{1}{2(1+n^2)} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin 2nt dt = \frac{n}{2(1+n^2)}$$

d'où

$$\int_0^{+\infty}(f_n'(t))^2 dt = \frac{1+n^2}{2}\frac{1}{2} + \frac{n^2-1}{2}\frac{1}{2(1+n^2)} - n\frac{n}{2(1+n^2)} = \frac{1}{4(1+n^2)}[(n^2+1)^2 + (n^2-1) - 2n^2] = \frac{n^2}{4}$$

et enfin :

$$\boxed{N_2(f_n) = \frac{n}{2}}$$

3.4)
Que faut il faire : existe-t-il a et b strictement positifs tels que pour toute fonction $f \in E_2$ $aN_2(f) \leq N_1(f) \leq bN_2(f)$.
On connaît déjà $b=2$. Le problème est donc a .
Si a existe on doit montrer $\forall f \in E_2$ $aN_2(f) \leq N_1(f)$. Si a n'existe pas on doit construire un contre exemple et trouver une suite (f_n) telle que $\lim\left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)}\right) = 0$.
vue la question précédente c'est le plan "a n'existe pas" qui est préparé . On montre donc $\lim\left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)}\right) = 0$
f_n est dans E_2, donc dans E_1. On a $\quad N_1(f_n)^2 = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin^2(nt)}{t^2}dt.$ et donc $\left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)}\right)^2 = 4\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin^2(nt)}{n^2t^2}dt$
On constate que la suite $\phi_n(t) = \frac{e^{-2t}\sin^2(nt)}{n^2t^2}$ converge simplement vers 0 . Une convergence dominée donne le résultat:

- ϕ_n est continue intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $N_1(f_n)$ existe
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}^{+*}$, $|\phi_n(t)| \leq e^{-2t}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  donc par convergence dominée

$$\lim\left(\frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)}\right)^2 = \lim\left(\int_0^{+\infty}\phi_n(t)dt\right) = 0$$

conclusion :

$$\boxed{N_1 \text{ et } N_2 \text{ ne sont pas équivalentes}}$$

4)

- En reprenant III.2.1 avec $\int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt$ au lieu de $\int_0^x (h(t))^2 dt$ on voit que $\int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt$ admet une limite en $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t}g'(t))^2 dt \leq \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 \, dt$
- Ensuite dans (R) on obtient $(g(x))^2 = 2\int_0^x f'^2 - 2\int_0^x (\sqrt{t}g'(t))^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^x h^2$ somme d'intégrales impropres convergentes. D'où g^2 admet une limite en $+\infty$. Notons ℓ cette limite.
- Supposons que $\ell \neq 0$. Alors $h^2(x) = \frac{g^2(x)}{x} \sim_{x \to +\infty} \frac{\ell}{x}$ ce qui contredit l'intégrabilité de h^2 ($f \in E_2$) . Donc $\ell = 0$. Et donc

$$\boxed{g(t) -\!>_{t \to +\infty} 0}$$