# Concours e3a 1999
# EPREUVE DE MATHEMATIQUES 3
## LECTURE DU SUJET

Une lecture rapide du sujet montre que toutes les séries sont des séries de signes alternés. Il est donc important de commencer par rédiger au brouillon et dans le calme l'énoncé du critère spéciale des séries alternées.
L'énoncé dit clairement que les parties I et II sont indépendantes des parties IV et V .
On doit noter aussi que la partie V (sauf la question 6 ) est une étude classique d'une fonction définie comme somme d'une série (continuité , dérivabilité , limite , intégration ). Il est probablement préférable de commencer par cette partie où il vous est d'abord demander d'énoncer des théorèmes de cours.

## Préliminaire

Critère des séries alternées : Soit $(u_n)$ une suite de signe alternée telle que $|u_n|$ décroît vers 0 . alors

- la série $\sum u_n$ converge
- la somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives
- $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

## Partie I

On a déjà calculé $R_0 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} = -\ln(2)$
1) a) Critère des séries alternées: la suite $(\frac{1}{p})$ décroît et tend vers 0 donc

$$\boxed{\sum \frac{(-1)^p}{p} \text{ converge et } |R_n| \leq \frac{1}{n+1}}.$$

1) b) *Danger : la série géométrique ne converge pas pour $x = 1$.*
On a

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p} &= \sum_{p=n+1}^{q} (-1)^p \int_0^1 x^{p-1} dx = -\int_0^1 \sum_{p=n+1}^{q} (-x)^{p-1} dx \text{ (la somme a un nombre fini de termes)}\\ &= -\int_0^1 (-x)^n \frac{1-(-x)^{q-n}}{1+x} dx = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx + (-1)^q \int_0^1 \frac{x^q}{1+x} dx\end{aligned}$$

On fait tendre $q$ vers $+\infty$:
$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p} \longrightarrow \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$ (la série converge)
$0 \leq \int_0^1 \frac{x^q}{1+x}\, dx \leq \int_0^1 x^q\, dx = \frac{1}{q+1} \longrightarrow 0$

$$\boxed{R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx}$$

*Remarque 5/2 : On peut avoir l'idée de cherche à intégrer sur l'intervalle [0,1[. Toutefois $\sum \int_I \left|(-t)^{n-1}\right| dt = \sum \frac{1}{n}$ diverge . La suite des sommes partielles n'est pas monotone. On peut s'en sortir avec une domination des sommes partielles $\left|(-x)^n \frac{1-(-x)^{q-n}}{1+x}\right| \leq 2$ et une preuve de l'intégrabilité de chaque fonction sur l'intervalle. C'est aussi long sinon plus.*
2) a) On intègre par parties $u' = x^{n-1}$ et $v = \frac{x}{1+x}$ ,$u$ et $v$ sont bien $C^1$ sur $[0, 1]$:

$$(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = (-1)^{n+1} \left[\frac{x^n}{n} \frac{x}{1+x}\right]_0^1 - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{(-1)^n}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx$$

or $0 \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx \leq \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n^2}$
donc $\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}\, dx = O(\frac{1}{n^2})$
On a bien

$$\boxed{R_n = \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\frac{1}{n^2})}$$

*Remarque : l'intégration par partie conduit directement au $\frac{1}{n}$ . Il est possible aussi de poser $u' = x^n \cdots$ On aura alors $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2 dx}$ et on ferra un D.L. de $\frac{1}{n+1}$ .*
2) b) La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série alternée) et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument (série de Riemann avec $2 > 1$) donc

$$\boxed{\text{la série } \sum R_n \text{ converge.}}$$

3) On retrouve une intégrale d'une somme partielle d'une série géométrique.

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{n} R_p &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+1}\int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,dx = \int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^{p+1}\frac{x^p}{1+x}\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-1-(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(1+x)^2}\right)dx = -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx\end{aligned}$$

De plus $-\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{1}{(1+x)}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}$
et $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \leq \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2} \to 0$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{-1}{2}}$$

# Partie II

1) a) *C'est une comparaison d'une série $\sum_{k=1}^{n}\phi(k)$ à l'intégrale $\int_1^n \phi$ pour une fonction $\phi$ continue décroissante de limite nulle en $+\infty$ .*
On montre que la suite $v_n = U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est décroissante et minorée:
La fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur le segment $[p, p+1]$ donc :

$$\forall x \in [p, p+1], \frac{1}{\sqrt{p+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

On a donc : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq 0$
et en ajoutant pour $p$ allant de 1 à $n-1$ : $\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$ soit $v_n \geq 0 + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$
La suite $(v_n)$ est donc convergente. En notant $L+2$ sa limite on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(Un - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) = L+2}$$

*Remarque 1 : On peut aussi revenir à la convergence de la série $\sum(v_{n+1} - v_n) = \sum\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right)$ et faire un développement limité $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \sim \frac{-1}{4n^{3/2}}$*
*Remrque2 : avec une telle notation pour la limite on peut s'attendre à ce que le 2 se simplifie ensuite.*
1) b) *Toujours comparaison d'une série et d'une intégrale.*
Pour $\theta > 1$, $\sum \frac{1}{p^\theta}$ converge donc $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}$ existe.
La fonction $x \to \frac{1}{x^\theta}$ est décroissante sur le segment $[p, p+1]$ donc :

$$\begin{aligned}\forall x &\in [p, p+1], \frac{1}{(p+1)^\theta} \leq \frac{1}{x^\theta} \leq \frac{1}{p^\theta} \\ \frac{1}{(p+1)^\theta} &\leq \int_p^{p+1} \frac{1}{x^\theta} \leq \frac{1}{p^\theta}\end{aligned}$$

Soit par changement à gauche :

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^\theta} \leq \frac{1}{p^\theta} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x^\theta}$$

On ajoute alors de $p = n+1$ à $p = +\infty$ (la série converge et les intégrales ont des limites )

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\int_{n+1}^{N} \frac{dx}{x^\theta}\right) \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \leq \lim_{N\to+\infty}\left(\int_n^N \frac{dx}{x^\theta}\right)$$

On calcule la primitive et on passe à la limite :

$$\frac{(n+1)^{1-\theta}}{\theta - 1} \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \leq \frac{n^{1-\theta}}{\theta - 1}$$

Les deux expressions qui encadrent sont équivalentes.

$$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \text{ est équivalent à } \frac{n^{1-\theta}}{\theta-1} \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty}$$

1 bis) *Remarque : ce résultat est au programme en MP .*
La convergence de la série $\sum b_n$ est un résultat de cours :On a deux séries à termes positifs et $b_n = O(a_n)$ .

Pour prouver l'équivalent il faut revenir au $\varepsilon$ pour traduire l'équivalent :

$$\exists n_0, \exists \varepsilon_n\ ,\ \forall n \geq n_0\ b_n = a_n \varepsilon_n \text{ avec } \lim{(\varepsilon_n)} = 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, p \geq N \Rightarrow a_p(1-\varepsilon) \leq b_p \leq (1+\varepsilon)a_p$$

On fait la somme pour $p$ variant de $n+1$ à l'infini (les séries convergent).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)\sum_{p=n+1}^{\infty} a_p \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} b_p \leq (1+\varepsilon)\sum_{p=n+1}^{\infty} a_p$$

et donc $\sum_{p=n+1}^{\infty} b_p = \psi_n \sum_{p=n+1}^{\infty} a_p$ avec $\lim(\psi_n) = 1$ $\boxed{\sum_{p=n+1}^{\infty} a_p \sim \sum_{p=n+1}^{\infty} b_p}$
2)
a) On a $v_n = U_n - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} - 2 - L$ . Donc d'après la question II1a $\lim(v_n) = 0$ . Ce qui assure déjà la convergence de la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$
Un calcul de développement limité de $(v_{n+1} - v_n)$ va donner l'équivalent de $v_{n+1} - v_n$
$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{n})^{-1/2} - 2\sqrt{n}\left((1+\frac{1}{n})^{1/2} - 1\right)$
$= (n)^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2(n)^{1/2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\frac{-1}{4n^{3/2}} + o(\frac{1}{n})\right)$
donc

$$\boxed{v_{n+1} - v_n \sim_{n\to+\infty} \frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}}$$

On a donc deux séries équivalentes à termes négatifs à partir d'un certain rang.
On en déduit que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est convergente et $\sum_{p=n+1}^{+\infty}(v_{p+1} - v_p) = \lim_{+\infty}(v_p) - v_n = -v_n$ .
De plus son terme général est équivalent à $\frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ et en appliquant la question 1bis à l'opposé de la série on a :

$$\boxed{v_n = -\sum_{p=n}^{+\infty} v_{p+1}\text{-}v_p \sim_{n\to+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{4p^{\frac{3}{2}}}}$$

De la question 1)b) on déduit que $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{4p^{\frac{3}{2}}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
On a donc bien $\boxed{v_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}}$.
2) b) On procède de la même façon en posant $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$
$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} + \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{16n^{\frac{5}{2}}}$
$w_n = \sum_{p=n}^{+\infty}(w_p - w_{p+1}) \sim_{n\to+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{-1}{16n^{\frac{5}{2}}} \sim_{n\to+\infty} \frac{-1}{24n\sqrt{n}}$
Donc $\boxed{v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} \sim_{n\to+\infty} \frac{-1}{24n\sqrt{n}}}$
On a bien $\boxed{U_n = 2\sqrt{n} + L + \frac{1/2}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})}$
3) a) $S$ existe car d'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge.
3) b)Si on ajoute $\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ et $\sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ les termes d'indices impaires disparaissent :

$$\sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} + \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{p}} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$\boxed{r_{2n} = S - \sum_{p=1}^{2n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S - \sqrt{2}U_n + U_{2n}}$
3) c) En utilisant la formule trouvée au II 2) b), on obtient $\boxed{r_{2n} = S + (1-\sqrt{2})L - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})}$.
La série $\sum \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ et $\boxed{S = (\sqrt{2}-1)L}$.
On cherche maintenant un développement asymptotique de $r_n$ .
pour $k$ pair on a déjà : $r_k = \frac{-1}{2\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$
Pour $k$ impair on a :
$r_k = r_{2n+1} = r_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{-1}{2\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + O(\frac{1}{n\sqrt{n}}) = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/2}\right) + O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$
or $1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $O(\frac{1}{n^\alpha}) = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$ car $k \sim 2n$
donc $r_{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$
On obtient pour tout $k > 0$, $\boxed{r_k = \frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{k}} + O(\frac{1}{k^{3/2}})}$
de plus $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{k}}$ converge (série alternée) et $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge absolument donc la série

$$\boxed{\sum r_n \text{ est convergente}}$$

# Partie III

1) Pour $0 < a < b$, on fait le changement de variable $C^1$ : $t = pu$ dans l'intégrale $\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt$.
$\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt = p^x \int_{a/p}^{b/p} u^{x-1}e^{-pu}\,du$.
On fait ensuite tendre $a$ vers 0 puis $b$ vers $+\infty$.
On obtient $\Gamma(x) = p^x \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-pu}\,du$, la fonction $\Gamma$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ et donc
$\boxed{\frac{1}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-pt}\,dt}$.
2) La série $\frac{(-1)^p}{p^x}$ converge (série alternée) donc $q_n$ est bien définie pour tout $x > 0$.
$t \mapsto \frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$
En 0, $\frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} \sim \frac{t^{x-1}}{2}$ et $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{2}$ est intégrable au voisinage de 0 pour tout $x > 1$.
En $+\infty$, $\frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}} = o(e^{-t})$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.
On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-pt}}{1+e^{-t}}\,dt$ existe pour tout $x \in ]0,+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\sum_{p=n+1}^{N} \frac{(-1)^p}{p^x} = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\sum_{p=n+1}^{N}(-1)^p e^{-pt}\,dt$
$= \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}\frac{(-1)^{n+1}e^{-(n+1)t}-(-1)^{N+1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt$
$= \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt + \frac{(-1)^N}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt$
On fait ensuite tendre $q$ vers $+\infty$
$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{(-1)^p}{p^x} \longrightarrow \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$
$0 \le \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(N+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt \le \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(N+1)t}\,dt = \frac{1}{(q+1)^x} \longrightarrow 0$.
On obtient : $\boxed{q_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(n+1)t}}{1+e^{-t}}\,dt}$
*Remarque :Une convergence dominée des sommes partielles permet aussi de conclure.*
3) $\sum_{p=0}^{n} q_p(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+e^{-t}}\sum_{p=0}^{n}\left((-1)^{p+1}e^{-(p+1)t}\right)\,dt$
$= \frac{-1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt - \frac{(-1)^n}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(n+2)t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt$
puis on fait tendre $n$ vers $+\infty$:
$0 \le \frac{(-1)^n}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-(n+2)t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt \le \frac{(1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-(n+2)t}\,dt = \frac{(1}{\Gamma(x)}\frac{1}{(n+1)^x} \longrightarrow 0$.
Donc la série de terme général $q_n$ converge et a pour somme: $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty} q_p(x) = \frac{-1}{\Gamma(x)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt}$
Pour $x = 1$, on trouve $\sum_{p=0}^{+\infty} R_p = \sum_{p=0}^{+\infty} q_p(1) = -\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\,dt = \left[\frac{-1}{1+e^{-t}}\right]_0^{+\infty} = \frac{-1}{2}$

# Partie IV

1) a) $f(t) = \frac{1}{t^x}$ pour $x > 0$
1) b) $x_n$ est définie car d'après le critère des séries alternées, la série $\sum(-1)^p f(p)$ converge.
2)

$$\begin{aligned}\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\left(f(p)-f(p+1)\right) &= \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p) + \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^{p+1}f(p+1) \text{ (les deux séries convergent bien)}\\ &= \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p f(p) + \sum_{p=n+2}^{+\infty}(-1)^p f(p) = 2x_n - (-1)^{n+1}f(n+1)\end{aligned}$$

On en déduit $x_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1) + \frac{1}{2}\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\left(f(p)-f(p+1)\right)$.
La série $\sum(-1)^{n+1}f(n+1)$ converge (c'est $x_1$)
$f$ est décroissante et de limite nulle en $+\infty$ donc la suite $(f(p)-f(p+1))$ est positive et de limite nulle en $+\infty$.
De plus $f$ est convexe ce qui prouve que $(f(p)-f(p+1))$ décroît :
En effet $f(p)-f(p+1) = -f'(c_p)$ avec $c_p \in ]p,p+1[$ d'après le théorème des accroissements finis pour une fonction $C^1$ . De plus comme $f$ est convexe $f'$ est croissante et donc $c_{p+1} > c_p \Rightarrow -f'(c_{p+1}) \le -f'(c_p)$
D'après le critère des séries alternées, on peut majorer :
$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\left(f(p)-f(p+1)\right)\right| \le f(n+1)-f(n+2)$.
Or la série $\sum\left(f(n+1)-f(n+2)\right)$ converge car la suite $(f(n+1))$ converge . $\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\left(f(p)-f(p+1)\right)$ est donc le terme général d'une série absolument convergente.
On en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum x_n \text{ converge}}$.
3) On sait de plus que $f(n+1)$ est équivalent à $f(n+2)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ce qui s'écrit
$f(n+1)-f(n+2) = o(f(n+1))$.
On obtient alors $x_n = \frac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1) + o(f(n+1))$.

$$\boxed{x_n \text{ est donc équivalent à } \tfrac{1}{2}(-1)^{n+1}f(n+1) \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$$

.

## Partie V $q_0(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$

1)$q_0$ est la somme d'une série de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ . Pour montrer la continuité de $q_0$ sur cette intervalle , il suffit de montrer la convergence uniforme sur tout segment $[a,b]$ .
La fonction $x\mapsto\frac{(-1)^p}{p^x}$ est continue sur $]0,+\infty[$
D'après la majoration du reste d'une série alternée on peut dire que

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}\right|\leq\sup_{x\in[a,b]}\frac{1}{(n+1)^x}=\frac{1}{(n+1)^a}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

La série $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p^x}$ converge donc uniformément sur tout segment $[a,b]$ avec $a>0$

$$\boxed{q_0\text{ est continue sur }]0,+\infty[}$$

.
2) $q_0$ est la somme d'une série de fonctions $C^1$ sur $]0,+\infty[$ . Pour montrer que $q_0$ est $C^1$ sur cette intervalle et dériver terme à terme la série , il suffit de montrer la convergence uniforme de la série des dérivées sur tout segment $[a,b]$. .
La fonction $x\mapsto\frac{(-1)^p}{p^x}$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$ de dérivée $x\mapsto\frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}$
Pour tout $x\in[a,b]$, la suite $(\frac{\ln p}{p^x})$ est positive et décroissante pour $p>e^{1/a}$.$(\frac{d\left(p^{-x}\ln(p)\right)}{dp}=p^{-x-1}\left(1-x\ln(p)\right)$ )
En utilisant le critère des séries alternées, on obtient donc pour $p>e^{1/a}$

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}\right|\leq\sup_{x\in[a,b]}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}=\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

La série $\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p+1}\ln p}{p^x}$ converge donc uniformément sur tout segment $[a,b]$ avec $a>0$
On en déduit que $\boxed{q_0\text{ est de classe }C^1\text{ sur }]0,+\infty[}$.
3) $q_0$ est la somme d'une série de fonctions de signe alternée.
On peut donc encadrer $q_0$ entre les premiers termes de la suite des sommes partielles:

$$-1\leq q_0(x)\leq-1+\frac{1}{2^x}$$

$$\boxed{\lim_{+\infty}(q_0)=-1}$$

4) En utilisant **IV 2)** avec $n=0$ et $f(t)=\frac{1}{t^x}$ qui est bien convexe décroissante de limite nulle , on écrit

$$q_0(x)=-\frac{1}{2}+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{p^x}-\frac{1}{(p+1)^x}\right)$$

Or la série ci dessus est alternée (cf IV) donc on peut encadrer entre deux termes consécutifs:

$$-\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{2^x}\right)\leq q_0(x)\leq-\frac{1}{2}$$

puis on fait tendre $x$ vers 0:
$q_0$ admet donc un prolongement par continuité en 0 en posant $\boxed{q_0(0)=\frac{-1}{2}}$
5)a) On reprend, pour $n=0$, la formule de la question 4):
$q_0(x)=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{p^x}-\frac{1}{(p+1)^x}\right)=q_0(0)+\frac{x}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}$.
5)b) $\frac{q_0(x)-q_0(0)}{x}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\int_p^{p+1}\frac{dt}{t^{x+1}}=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\frac{-1}{x}\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)$
Pour calculer la limite en 0 de cette expression, montrons que la série $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
D'après le IV n peut donc appliquer le critère des séries alternées pour majorer le reste de la série

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)\right|\leq\frac{1}{(n+1)^x}-\frac{1}{(n+2)^x}\leq\frac{1}{(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\to}0$$

La série $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ {}^p\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)$converge donc uniformément sur $]0,+\infty[$ donc

$$\lim_{x\to 0}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\frac{-1}{x}\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)=\sum_{p=1}^{\infty}\lim_{x\to 0}\left(\frac{(-1)^{p+1}}{x}\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)\right)$$

Or

$$\left(\frac{1}{(p+1)^x}-\frac{1}{p^x}\right)=\left(\frac{1}{p^x}\right)\left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^{-x}-1\right)=\left(\frac{1}{p^x}\right)\left(e^{-x\ln(1+1/p)}-1\right)\sim_{x\to 0}-x\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

$q_0$ est bien dérivable en 0 avec

$$\boxed{q_0'(0)=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\left(\ln 1+\frac{1}{p}\right)}$$

6)

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{2k-1}{2k}\right)=\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{4^k\,(k!)^2}\right)\end{aligned}$$

Or $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)=1.3.5.\cdots(2n+1)=\frac{(2n+1)!}{2.4\cdots(2n)}=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$ et
$\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)=1.3.5.\cdots(2n-1)=\frac{(2n)!}{2.4\cdots(2n)}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

$$\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\ln\left(\frac{(2n)!^2.(2n+1)}{2^{4n}n!^4}\right)$$

D'après la formule de Stirling
$\frac{(2n)!^2.(2n)}{2^{4n}n!^4}\sim_{n\to+\infty}\frac{\left((2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}\right)^2.(2n)}{2^{4n}\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\right)^4}=\frac{2}{\pi}$
donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{2n}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\ln(\frac{2}{\pi})$
La question précédente prouve la convergence de la série. On a donc

$$\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\ln(\frac{2}{\pi})}$$