# MINES PONT
# PC 2007

Remarque 5/2 : $S_\alpha(x)$ est une série trigonométrique.Si $\alpha > 1$ on prouve que la série converge normalement la série est donc la série de Fourier de $S_\alpha$ ce qui donne d'autres outils d'étude dans ce cas.

## Partie I

Je pose $\boxed{f_\alpha : x -> \dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}}$

**I. 1**.On utilise le théorème de continuité d'une série de fonctions:

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , $f_\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}$
- La série $\sum f_\alpha$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ($\alpha > 1$) indépendant de $x$.

$$\boxed{S_\alpha \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$$

**I.2**. Comme $t \geq 0$, et $|u| < 1$, $e^t - u \neq 0$. Aussi $J : t \mapsto \dfrac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}$ est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives.

- Etude sur $]0, 1]$ : $J(t) \sim \dfrac{1}{1-u} . \dfrac{1}{t^{1-\gamma}}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $1 - \gamma < 1$, soit $\gamma > 0$.
- Etude sur $[1, +\infty[$ : $\lim_{t \to +\infty} \left(t^2 J(t)\right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\dfrac{t^{\gamma+1}}{e^t}\right) = 0$. Donc $J$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ quelque soit $\gamma$.

$$\boxed{J \text{ est intégrable sur } ]0, +\infty[ \text{ si et seulement si } \gamma > 0}$$

**I.3.** Comme $|u| < 1$, pour tout $t \geq 0$, $|ue^{-t}| < 1$. et donc :

$$ue^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (ue^{-t})^n = ue^{-t} \frac{1 - (ue^{-t})^N}{1 - ue^{-t}} = \frac{u - u(ue^{-t})^N}{e^t - u}$$

et donc :

$$\boxed{R_N(t, u) = \frac{u(ue^{-t})^N}{e^t - u} t^{\alpha-1}}$$

**I.4.** On peut appliquer le théorème de convergence dominée:

- $t -> R_N(t, u)$ est continue , intégrable sur $[0, +\infty[$ car $|R_N(t, u)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - u}$ qui est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ car $\alpha > 0$ d'après **Q. I.2**).
- $(R_N(t, u))$ converge simplement vers 0 car $-1 < ue^{-t} < 1$
- On a domination car : $|R_N(t, u)| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - u}$, continue intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ( **Q.2)**

Par convergence dominée,

$$\boxed{\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt = 0}$$

*On peut aussi dire que* $t -> \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - u}$ *est continue sur* $R^+$ *intégrable . .On a donc* $0 \leq |R_N(t, u)| \leq \left|u^{N+1}\right| \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - u} dt$ *et on intègre l'inégalité.*

**I.5.** On a

$$\int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt = \int_0^{+\infty} \frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} dt - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} (ue^{-t})^n t^{\alpha-1}\right) dt$$

Comme la somme a un nombre fini de termes et comme chaque intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^{\alpha-1} dt$ converge ( la fonction est continue positive négligeable devant $t^2$)

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{N}(ue^{-t})^n t^{\alpha-1} = \sum_{n=1}^{N} u^n \int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1}dt$$

et le changement de variable $x = nt$ $C^1$ bijectif de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}t^{\alpha-1} = \frac{1}{n^\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$$

Finalement, par la limite obtenue à la question précédente, on a comme la série $\sum \frac{u^n}{n^\alpha}$ converge ( par convergence absolue car $\left|\frac{u^n}{n^\alpha}\right| \leq |u^n|$ avec $|u| < 1$ ) :

$$\boxed{\forall u \in ]-1,1[\ ,\ \int_0^{+\infty}\frac{ut^{\alpha-1}}{e^t - u} = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n^\alpha}}$$

**I.6.** Avec ce qui est admis, il vient

$$\Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n^\alpha} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}}dt$$

Donc

$$S_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^{t-ix}-1}\right)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{t^{\alpha-1}}{e^{t-ix}-1}\right)dt$$

Or

$$\frac{1}{e^{t-ix}-1} = \frac{\overline{(e^{t-ix}-1)}}{|e^{t-ix}-1|^2} = \frac{e^{t+ix}-1}{e^{2t}-2e^t\cos x+1}$$

ce qui entraîne que

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1}{e^{t-ix}-1}\right) = \frac{e^t\sin x}{e^{2t}-2e^t\cos x+1} = \frac{\sin x}{2}.\frac{1}{\operatorname{ch} t-\cos x}$$

Et donc en reportant dans l'équation donnant $S_\alpha(x)$ :

$$\boxed{S_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\sin x}{2}\times\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t-\cos x}dt}$$

*Ce qui permet de prouver que $S_\alpha(x)$ est continue si $x \neq 0[2\pi]$ en dominant $\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t-\cos x}$ sur tout segment $[a,b]\subset]0,2\pi[$*

**I.7.** On écrit que $\frac{1}{\operatorname{ch} t-u} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\times\frac{1}{1-\frac{u}{\operatorname{ch} t}}$, et comme $\left|\frac{u}{\operatorname{ch} t}\right| < 1$, on a

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t-u} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{(\operatorname{ch} t)^n}$$

et donc :

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t-u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n.t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$$

Pour avoir le résultat on doit donc intégrer termes à termes la série :

- Pour tout $n$ $t->\frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ est continue sur le segment $[0,M]$ donc y est intégrable.
- la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^\alpha-1}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ converge simplement vers $\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t-u}$

- hypothèse supplémentaire:
$$\int_0^M \left|\frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\right| dt \le \int_0^M \frac{|u|^n .t^{\alpha-1}}{1^{n+1}} dt = \frac{M^\alpha}{\alpha}|u|^n$$
ce qui assure comme $|u|<1$ la convergence de la série $\sum \int_0^M \left|\frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\right| dt$

Et donc :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} dt = \int_0^M \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^M \frac{u^n t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt$$
$$\boxed{\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} dt = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt}$$

**I.8.** Vérifions les convergences :

- $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt$ converge car la fonction est continue positive sur $[0,+\infty[$ , négligeable devant $t^2$ (rappel $\operatorname{ch}(X) \sim_{X->+\infty} \frac{e^X}{2}$)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt$ converge car $\left|u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt\right| \le |u|^n \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt\right)$

On peut donc regarder la limite si $M$ tend vers $+\infty$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_M^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt$ .Or

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_M^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u^n| . \int_M^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt = \frac{1}{1-|u|} \int_M^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt$ converge $\int_M^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt - \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t)} dt$ tend vers 0 ce qui assure le résultat.

$$\boxed{\lim_{M->+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt}$$

*Remarque : On peut aussi poser $\phi(M) = u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt$ , montrer que la série de fonctions $\sum \phi(M)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ et en déduire par le théorème sur la limite d'une somme de série :*

$$\lim_{M->+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \phi(M)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{M->+\infty} (\phi(M))$$

**I.9.**On vient de prouver que pour $u \in ]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch}(t) - u} dt$$

Pour $x \neq k\pi$, on peut prendre $u = \cos(x)$ dans la relation de **Q.6 :**

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x} dt$$

On a donc avec **Q.8**

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{\operatorname{ch} t - \cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} (\cos x)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$$

Donc

$$\boxed{S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} G_\alpha(\cos x)}$$

## Partie II

La notation du sujet n'est pas usuel. Toutefois comme on intègre une fonction positive , l'intégrale impropre diverge vers $+\infty$ , ou converge.
la relation (4) signifie donc que $B$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On fera attention que la borne 0 est ouverte.
**II.10**. $\phi(s)=o(1)$ veut dire : $\forall\varepsilon>0$ , $\exists\delta>0$ , $0<s\le\delta\Rightarrow|\phi(s)-1|\le\varepsilon$
En prenant $\phi(s)=\dfrac{B(s)-as^{\lambda-1}}{as^{\lambda-1}}$ on obtient : $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$ , $0<s<\delta\Rightarrow|B(s)-as^{\lambda-1}|\le\varepsilon as^{\lambda-1}$.
Donc, sous les mêmes conditions, comme $e^{-ns}>0$

$$|(B(s)-as^{\lambda-1})e^{-ns}|\le\varepsilon as^{\lambda-1}e^{-ns}$$

ce qui donne en intégrant l'inégalité sur $]0,\delta]$

$$\int_0^\delta|(B(s)-as^{\lambda-1})|e^{-ns}ds\le\varepsilon a\int_0^\delta s^{\lambda-1}e^{-ns}ds<\varepsilon a\int_0^{+\infty}s^{\lambda-1}e^{-ns}ds==\frac{1}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)$$

d'après le calcul de la question **Q.5.**
Les fonctions sont bien intégrables sur $]0,\delta]$ :
• $B(s)e^{-ns}$ car $|B(s)|\,e^{-ns}\le|B(s)|$ intégrable
• $s^{\lambda-1}e^{-ns}$ par **Q.5**
Et donc :

$$\boxed{\int_0^\delta|(B(s)-as^{\lambda-1})|e^{-ns}ds<\varepsilon a\frac{1}{n^\lambda}\Gamma(\lambda)}$$

**II.11.** Pour $n\ge1$, $s\to|B(s)-as^{\lambda-1}|e^{-ns}$ est intégrable sur $[\delta,+\infty[$ car :

- $s->|B(s)|\,e^{-ns}$ est continue positive majorée par $|B(s)|$ intégrable
- $s->as^{\lambda-1}e^{-ns}$ est intégrable car continue positive négligeable devant $s->\dfrac{1}{s^2}$ .
- et

$$\left|\int_\delta^{+\infty}|B(s)-as^{\lambda-1}|e^{-ns}ds\right|\le\int_\delta^{+\infty}|B(s)-as^{\lambda-1}|e^{-ns}ds\le\int_\delta^{+\infty}|B(s)-as^{\lambda-1}|e^{-s}.e^{-(n-1)\delta}ds=C(\delta)e^{-(n-1)\delta}$$

avec

$$\boxed{C(\delta)=\int_\delta^{+\infty}|B(s)-as^{\lambda-1}|e^{-s}ds}$$

*Remarque : il est important de garder un $e^{-s}$ dans l'intégrale pour assurer l'intégrabilité de la fonction.*
**II.12.** On écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(B(s)-as^{\lambda-1}\right)e^{-ns}ds=\int_0^\delta\left(B(s)-as^{\lambda-1}\right)e^{-ns}ds+\int_\delta^{+\infty}\left(B(s)-as^{\lambda-1}\right)e^{-ns}ds$
On sait que

- $\displaystyle\int_0^{+\infty}s^{\lambda-1}e^{-ns}ds=\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}$
- $\displaystyle|\int_0^\delta\left(B(s)-as^{\lambda-1}\right)e^{-ns}ds|<\varepsilon\quad\frac{a\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}$,
- $\displaystyle\left|\int_\delta^{+\infty}\left(B(s)-as^{\lambda-1}\right)e^{-ns}ds\right|\le C(\delta)e^{-(n-1)\delta}$.

  On a donc :

$$\left|\frac{\int_\delta^{+\infty}B(s)e^{-ns}ds}{a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}}-1\right|\le\varepsilon+\frac{C(\delta)}{a\Gamma(\lambda)}\left(n^\lambda e^{-(n-1)\delta}\right)$$

Le facteur $n^\lambda e^{-(n-1)\delta}$ tend vers 0 si $n$ tend vers $+\infty$ ( car $\delta>0$ ) : $\forall\varepsilon>0,\exists N$ , $n\ge N\Rightarrow\left|\dfrac{C(\delta)}{a\Gamma(\lambda)}\left(n^\lambda e^{-(n-1)\delta}\right)\right|\le\varepsilon$.

- Or on veut

$$\forall \varepsilon' > 0 \ , \ \exists N' \ , \ n \geq N' \Rightarrow \left| \frac{\int_\delta^{+\infty} B(s)e^{-ns}ds}{a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}} - 1 \right| \leq \varepsilon'$$

On prend donc $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ . On en déduit donc $\delta > 0$ tel que **Q.10** sot vérifié. Connaissant $\delta$ on détermine $N$ (qui dépend de $\delta$ mais ce n'est pas gênant car $\delta$ ne dépend pas de $n$ ) tel que $\left| \dfrac{C(\delta)}{a\Gamma(\lambda)} \left( n^\lambda e^{-(n-1)\delta} \right) \right| \leq \varepsilon$ . En réunissant les 2 : $n \geq N \Rightarrow \left| \dfrac{\int_\delta^{+\infty} B(s)e^{-ns}ds}{a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}} - 1 \right| \leq 2\varepsilon = \varepsilon'$ . $N' = N$ est une solution du problème. (du moins si $N > 0$ , sinon $N' = 1$ convient)

$$\boxed{\int_\delta^{+\infty} B(s)e^{-ns}ds = a\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}(1 + o(1)) \text{ , si } n -> +\infty}$$

**II.13.** On fait le changement de variable $t = \ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)$ suggéré par le passage de $t^{\alpha-1}$ à $\left(\ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)\right)^{\alpha-1}$
Si vous vous souvenez de l'expression de $Arg\,\mathrm{ch}$ en fonction d'un ln vous avez tout de suite $t = Arg\,\mathrm{ch}(e^s)$ , sinon vous calculez la fonction réciproque:

$$\begin{aligned}
\left( t = \ln\left(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(e^t = e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\left(e^t - e^s\right)^2 = e^{2s} - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^{2t} - 2e^s e^t = -1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(e^s = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Sous la forme $s = \ln(\mathrm{ch}(t))$ on voit que le changement de variable est $C^1$ bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ .
La forme $t = Arg\,\mathrm{ch}(e^s)$ donne $dt = \dfrac{e^s}{\sqrt{e^{2s} - 1}}ds$
Ainsi :

$$\boxed{a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}dt}{(\mathrm{ch}\,t)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}} e^{-ns}ds}$$

**II.14.** Par équivalent on a :

$$\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}) = \ln\left(\left(e^s - 1 + \sqrt{e^{2s} - 1}\right) + 1\right)$$

Or $u = \left(e^s - 1 + \sqrt{e^{2s} - 1}\right)$ tend vers 0 donc

$$\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}) \sim_0 e^s - 1 + \sqrt{e^{2s} - 1}$$

Or $e^s - 1 \sim s$ et $\sqrt{e^{2s} - 1} \sim_0 \sqrt{2s}$ . Comme $s <<_0 \sqrt{s}$ on a

$$\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}) \sim_0 \sqrt{2s}$$

Et donc $\quad B(s) \sim \dfrac{(\sqrt{2s})^{\alpha-1}}{\sqrt{2s}} \sim_0 2^{\alpha/2-1}s^{\alpha/2-1}.$

$$\boxed{B(s) \sim_0 2^{\alpha/2-1}s^{\alpha/2-1}}$$

**II.15.** On applique alors le résultat de **Q12** avec $a = 2^{\alpha/2-1}$ et $\lambda = \alpha/2$

$$a_n = \int_0^{+\infty} B(s)e^{-ns}ds \sim \frac{2^{\alpha/2-1}\Gamma(\alpha/2)}{n^{\alpha/2}}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n n^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2-1}\Gamma(\alpha/2)}$$

.