# D'après l'épreuve 1 de CENTRALE-SUPÉLEC 2008 - PSI

## Partie I. Récurrence en dimension 1

**I.A.** On peut écrire une boucle :

```
u:=proc(n) local U,k;
  U:=u0;
  for k from 1 to n do U:=a*U+b;  od;
  U;
end;
```

On peut écrire une fonction récursive

```
u:=n->if n>0   then a*u(n-1)+b else u0 end;
```

**I.B.** On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} + k = a\,u_n + k + b = a\,(v_n - k) + k + b$$

, donc

$$v_{n+1} = a\,v_n \iff ak = b + k \iff k = \frac{b}{a-1}$$

on peut diviser car $a \neq 1$

$$\boxed{k = \frac{b}{a-1}}$$

**I.C.** La suite $v$ est géométrique de raison $a$ et de premier terme $v_0 = u_0 + \dfrac{b}{a-1}$ ; donc $v_n = a^n \left(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\right)$

$$\boxed{u_n = a^n \left(u_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}}$$

**I.D.** On étude la limite de la suite $(u_n z^n)$

• Si $b = 0$ la suite est géométrique nulle ou non

-si $u_0 = 0$ ou $a = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$ et $R = +\infty$

- si $u_0 \neq 0$, et $a \neq 0$ alors $u_n z^n = (az)^n u_0$ est géométrique de raison $az$ donc $R = \dfrac{1}{a}$

• Si $b \neq 0$ et $u_0 + \dfrac{b}{a-1} = 0$ alors $u_n z^n = \dfrac{b}{1-a} z^n$ et $R = 1$

• Si $b \neq 0$ et $u_0 + \dfrac{b}{a-1} \neq 0$ on compare les deux termes :

La série $\sum a^n \left(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\right) z^n = \sum \left(u_0 + \dfrac{b}{a-1}\right) (az)^n$ à un rayon de convergence de $1/|a|$ ($+\infty$ si $a = 0$)

La série $\sum \dfrac{b}{a-1} z^n$ à un rayon de convergence de 1

- si $|a| \neq 1$ on ajoute deux séries entières de rayon de convergence différents : $R = \min(1, 1/|a|)$
- si $|a| = 1$ ( donc $a = -1$ vu le sujet) , le théorème sur la somme dit que $R \geq 1$ . mais ici

$$u_n = (-1)^n \left(u_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} = \begin{cases} u_0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ b - u_0 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$\sum u_0 z^{2n}$ à un rayon de convergence de 1 ($u_0 \neq 0$) et $\sum (b - u_0)\, z^{2n+1}$ a un rayon de 1 ou $+\infty$ (si $b = u_0$) , et donc d'après le cas particulier de la somme des séries d'indices pairs est impairs $R = 1$ (le plus petit)

Synthèse en posant $\dfrac{1}{0} = +\infty$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si } b = 0 \text{ et } au_0 = 0 \text{ alors } \rho_S = +\infty \\ \text{si } b = 0 \text{ et } au_0 \neq 0 \text{ alors } \rho_S = 1/|a| \\ \text{si } b \neq 0 \text{ et } u_0 + \dfrac{b}{a-1} = 0 \text{ alors } \rho_S = 1 \\ \text{si } b \neq 0 \text{ et } u_0 + \dfrac{b}{a-1} \neq 0 \text{ alors } \rho_S = \min(1, 1/|a|) \end{array}}$$

**I.E.** On part de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - au_n - b)\, z^n = 0$$

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n = \frac{1}{z}(S(z) - u_0)$ si $z \neq 0$

et si $|z|<1$ , $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$
D'après le **I.D** il faut faire attention au cas $b=0$ et $z\neq 0$
• si $b=0$ et $z\neq 0$: $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-au_n-b)\,z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}z^n - a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n = \dfrac{1}{z}(S(z)-u_0)-aS$
• si $b\neq 0$ et $z\neq 0$, $\rho_S\leq 1$ , donc $|z|<\rho_S \Rightarrow |z|<1$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-au_n-b)\,z^n = \dfrac{1}{z}(S(z)-u_0)-aS+b.\dfrac{1}{1-z}$
On remarque que la formule générale est vrai aussi dans le cas particulier (même si $|z|\geq 1$ )
Si $|z|<\rho_S$ et $z\neq 0$

$$\frac{1}{z}(S(z)-u_0)-aS+b.\frac{1}{1-z}=0$$

On multiplie par $z$

$$S(z)-u_0-azS(z)+b\frac{z}{1-z}=0$$

Si $z=0$ , $S(z)=$"le terme constant"$=u_0$ et l'égalité est encore vérifiée.

$$|z|<\rho_S \Rightarrow S(z)-u_0-azS(z)+b\frac{z}{1-z}=0$$

d'où finalement

$$\boxed{\forall z,|z|<\rho_S \Rightarrow\ S(z)=\frac{u_0}{1-az}+\frac{bz}{(1-z)(1-az)}}$$

*Remarque : pour préparer (illustrer) la suite le sujet impose un plan qui n'utilise pas la relation trouvée en I.C . On peut utiliser cette relation pour calculer la somme et ainsi vérifier.*
**I.F.** On a $\sum \dfrac{u_n z^n}{n!} = \left(u_0+\dfrac{b}{a-1}\right)\sum\dfrac{(az)^n}{n!} - \dfrac{b}{a-1}\sum\dfrac{z^n}{n!}$ . Les deux séries $\sum\dfrac{(az)^n}{n!}$ et $\sum\dfrac{z^n}{n!}$ ont un rayon de convergence infinie . Le produit par un scalaire conserve ce rayon (même si le scalaire est nul) et donc par somme $\rho_G\geq \min(+\infty,+\infty)=+\infty$
On sait que si on dérive termes à termes une série entière, la série obtenue a le même rayon de convergence que la série initiale et sa somme est , sur le disque ouvert de convergence, la somme de la série initiale. D'où le résultat.
*Remarque : Mais c'est peut-être une question de cours dont l'examinateur attend la démonstration.*
**I.G.** Pour tout $x$ réel (les séries entières ont pour rayon de convergence $+\infty$), on obtient par linéarité :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-au_n-b)\,\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}\frac{x^n}{n!} - a\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\frac{x^n}{n!} - b\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= G'x)-aG(x)-be^x \end{aligned}$$

La fonction $G$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+be^x$,
• l'équation homogène a les solutions sur $\mathbb{R}$ : $y=Ke^{ax}$
• une solution particulière est du type $y=\alpha e^x$ et donc $\alpha$ vérifie $\alpha=a\alpha+b$ soit $\alpha=\dfrac{b}{1-a}$ (on peut aussi faire une variation de la constante)
d'où les solutions sont de la forme $y=K\,e^{ax}+\dfrac{b}{1-a}\,e^x$. On dispose de la condition initiale $G(0)=u_0$, d'où $K+\dfrac{b}{1-a}=u_0$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\qquad G(x)=u_0\,e^{ax}+b\,\frac{e^x-e^{ax}}{1-a}}$$

**I.H.** On a d'après le calcul des coefficients d'une série entière $\dfrac{u_n}{n!}=\dfrac{G^{(n)}(0)}{n!}$. et comme, $G^{(n)}(x)=a^n u_0\,e^{ax}+b\,\dfrac{e^x-a^n e^{ax}}{1-a}$ on retrouve

$$u_n=a^n\left(u_0+\frac{b}{a-1}\right)-\frac{b}{a-1}$$

et on est content le calcul de $G$ est juste.
Pour programmer le calcul de $u_n$, on peut écrire la procédure

```
U:=proc(n):
  a∧n*(u0-b/(1-a))+b/(1-a)
end:
```

# Partie II. Récurrence en dimension 2

**II.A.**
**II.B.**
Pour $|z| < \rho$ et $z \neq 0$, un calcul analogue à celui de la question **I.E.** conduit aux équations

$$\frac{1}{z}\,(S(z) - u_0) - a\,S(z) - b\,T(z) = 0 \quad ; \quad \frac{1}{z}\,(T(z) - v_0) - c\,S(z) - d\,T(z) = 0\ ,$$

c'est-à-dire au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} (1-az)S(z) - bzT(z) = u_0 \\ -czS(z) + (1-dz)T(z) = v_0 \end{array}\right.$$

. Le déterminant de ce système est

$$\begin{aligned}\Delta(z) &= \left|\begin{array}{cc} (1-az) & -bz \\ -cz & (1-dz) \end{array}\right| = (1-az)(1-dz) - bcz^2 \\ &= 1 - (a+d)z + (ad-bc)z^2 = z^2\left(\left(\frac{1}{z}\right)^2 - (a+d)\left(\frac{1}{z}\right) + (ad-bc)\right) \text{ pour } z \neq 0\end{aligned}$$

Or comme on admet $|z| < \min(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{|\mu|})$ , on a $\frac{1}{|z|} > \max(|\lambda|, |\mu|)$ et donc $\frac{1}{z} \notin \{\lambda, \mu\}$ et donc $\frac{1}{z}$ n'est pas racine de $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$.
Donc le déterminant du système est non nul pour $z \neq 0$ (et aussi pour $z = 0$ ) et on peut utiliser les formules de Cramer pour résoudre.

$$\boxed{S(z) = \frac{1-dz}{\Delta(z)}\,u_0 + \frac{bz}{\Delta(z)}\,v_0 \quad ; \quad T(z) = \frac{cz}{\Delta(z)}\,u_0 + \frac{1-az}{\Delta(z)}\,v_0}\,.$$

**II.C.**D'après l'hypothèse admise à la question précédente $\sum u_n z^n$ converge si $|z| < \rho$ , et donc pour $z \in ]0, \rho[$ , $(u_n z^n)$ est bornée. et donc $|u_n| = O\left(\frac{1}{z^n}\right)$
On en déduit que pour tout $x$ réel

$$\left|\frac{u_n x^n}{n!}\right| = (u_n\,|z|^n).\frac{(|x/z|)^n}{n!} = O\left(\frac{|x/z|}{n!}\right)$$

Or la série $\sum \frac{|x/z|}{n!}$ converge pour tout $x$ réel donc par "O" la série $\sum \left|\frac{u_n x^n}{n!}\right|$ converge. et donc $R_G = +\infty$ .
*C'est la principe du lemme d'Abel.*
L'étude pour $H$ est symétrique.
**II.D.** Les fonctions $G$ et $H$ sont des séries entières définies et de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ (le disque ouvert de convergence) et leurs dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Les relations évidentes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - au_n - bv_n)\frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - cu_n - dv_n)\frac{x^n}{n!} = 0$$

donnent le système différentiel linéaire (même calculs qu'au I)

$$\left\{\begin{array}{l} G'(x) = aG(x) + bH(x) \\ H'(x) = cG(x) + dH(x) \end{array}\right.$$

**II.E.** La combinaison linéaire proposée donne la relation

$$d\,G'(x) - b\,H'(x) = (ad-bc)\,G(x)$$

Or $\lambda$ et $\mu$ sont les racines de $X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = 0$ , donc (produit des racines) $\lambda\mu = ad - bc$ et donc

$$d\,G'(x) - b\,H'(x) = \lambda\mu\,G(x)$$

On en déduit

$$G'' = a\,G' + b\,H' = a\,G' + d\,G' - (d\,G' - b\,H') = (a+d)\,G' - \lambda\mu\,G = (\lambda+\mu)G' - \lambda\mu\,G\ .$$

Calcul et résultat analogues pour $H$.

Les fonctions $G$ et $H$ sont donc solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' - (\lambda + \mu)\, y' + \lambda\mu\, y = 0 \,.$$

**II.F.** L'équation précédente est une équation différentielle linéaire du second ordre **à coefficients constants.** On utilise l'équation caractéristique pour résoudre
L'équation caractéristique est $r^2 - (\lambda + \mu)\, r + \lambda\mu = 0$ de racines $\lambda$ et $\mu$ :

- Si $\lambda \neq \mu$, les solutions sont les combinaisons linéaires de $x \mapsto e^{\lambda x}$ et de $x \mapsto e^{\mu x}$. On a donc

$$\exists\, (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4 \ , \ G(x) = A\, e^{\lambda x} + B\, e^{\mu x} \ , \ H(x) = C\, e^{\lambda x} + D\, e^{\mu x}$$

Les conditions initiales $G(0) = u_0, G'(0) = u_1 = au_0 + bv_0$ donnent :

$$\begin{cases} A + B = u_0 \\ \lambda A + \mu B = au_0 + bv_0 \end{cases}$$

qui est un système de Cramer car $\Delta = \mu - \lambda \neq 0$ . On peut le résoudre par quotient de déterminants

$$A = \frac{\mu u_0 - (au_0 + bv_0)}{\mu - \lambda} \ , \ B = \frac{(au_0 + bv_0) - \lambda u_0}{\mu - \lambda}$$

$$G(x) = \left( \frac{(\mu - a)\, e^{\lambda x} - (\lambda - a)\, e^{\mu x}}{\mu - \lambda} \right) u_0 + \left( \frac{b\, (e^{\mu x} - e^{\lambda x})}{\mu - \lambda} \right) v_0$$

et de même pour $H$ :

$$H(x) = \frac{c\, (e^{\mu x} - e^{\lambda x})}{\mu - \lambda} u_0 + \frac{(\mu - d)\, e^{\lambda x} - (\lambda - d)\, e^{\mu x}}{\mu - \lambda} v_0$$

- Si $\lambda = \mu$ les solutions sont les combinaisons linéaires de $x \mapsto e^{\lambda x}$ et de $x \mapsto x e^{\lambda x}$. On a donc

$$\exists\, (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4 \ , \ G(x) = (Ax + B)\, e^{\lambda x} \ , \ H(x) = (C\, x + D) e^{\lambda x}$$

Les conditions initiales $G(0) = u_0, G'(0) = u_1 = au_0 + bv_0$ donnent :

$$\begin{cases} B = u_0 \\ A + \lambda B = au_0 + bv_0 \end{cases}$$

Soit

$$B = u_0 \ , A = (a - \lambda) u_0 + bv_0$$

et donc

$$G(x) = ((a - \lambda) x + 1)\, e^{\lambda x} u_0 + bx e^{\lambda x} v_0$$

et

$$H(x) = cx e^{\lambda x} u_0 + ((d - \lambda) x + 1)\, e^{\lambda x} v_0$$

## Partie III. Transformation de Laplace

**III.A.** Si $f$ est CDI($\alpha$),je pose $M$=$\sup\limits_{\mathbb{R}^+} \left( |f(t)|\, e^{-\alpha t} \right)$. Si $\Re e(p) > \alpha$ on a :

$$\begin{cases} |f(t)\, e^{-pt}| = |f(t)|\, e^{-\Re e(p)\, t} = |f(t)| e^{-\alpha t}\, e^{-(\Re e(p) - \alpha) t} \leq M\, e^{-(\Re e(p) - \alpha) t} \\ t \mapsto f(t)\, e^{-pt} \ \text{ continue sur } \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

La fonction $t \mapsto e^{-(\Re e(p) - \alpha) t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $(\Re e(p) - \alpha) > 0$. On en déduit par majortion l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-pt}$ et donc la convergence de l'intégrale impropre $Lap(f)(p)$.
**II.B.** Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Soit $p$ un nombre complexe tel que $\Re(p) > \alpha$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x f'\,(t) e^{-pt} dt = \left[ f(t)\, e^{-pt} \right]_0^x + p \int_0^x f(t)\, e^{-pt}\, dt = f(x) e^{-px} - f(0) + p \int_0^x f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Du calcul précédent on déduit que $\left| f(x)\, e^{-px} \right| \leq M\, e^{-(\Re e(p) - \alpha) t}$ donc tend vers 0 en $+\infty$.(toujours car $-(\Re e(p) - \alpha) < 0$ ) et que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ converge, le second membre de l'égalité précédente a une limite finie lorsque $x$ tend vers $+\infty$. On en déduit que l'intégrale impropre $Lap(f')(p)$ converge et l'égalité

$$\boxed{Lap(f')(p) = p \cdot Lap(f)(p) - f(0)}$$

**III.C.** On a
$$Lap(G)(p) = \int_0^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{t^n}{n!} \right) e^{-pt}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{-pt}\, dt\,.$$
En posant $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-pt}\, dt$ (ces intégrales impropres sont bien convergentes dès que $\Re e(p) > 0$), une intégration par parties donne la relation de récurrence $I_n = \dfrac{n}{p}\, I_{n-1}$ pour $n \geq 1$, donc $I_n = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Finalement,
$$\boxed{Lap(G)(p) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{p^n} = \frac{1}{p} S\left(\frac{1}{p}\right)}$$

**III.D.** On a l'équation différentielle $G'(x) - aG(x) = b\exp(x)$. La linéarité de la transformation de Laplace donne
$$Lap(G')(p) - a \cdot Lap(G)(p) = b \cdot Lap(\exp)(p)\,.$$
Or, $Lap(\exp)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(1-p)t}\, dt = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$. On obtient donc, en utilisant **III.B.** :
$$(p-a) \cdot Lap(G)(p) - G(0) = \frac{b}{p-1}$$
Pour appliquer le résultat précédent il suffit d'avoir en se limitant à une variable réelle ::
- : $p > 0$
- la convergence des intégrales. c'est vérifié $G$ est CDI($\alpha$) et $p > \alpha$ , Or d'après l'expression de $G$ trouvé au au **I** $G$ est CDI($\alpha$) si $\alpha > a$ et $\alpha > 0$ . On prend $p > \max(0, a)$ ,
- le droit d'intégrer termes à termes . Or d'après le calcul de $I_n$ :

$$\int_0^{+\infty} \left| u_n \frac{t^n}{n!} e^{-pt} \right| dt = |u_n| \frac{1}{p^{n+1}}$$
Or (partie **I**) la série entière $\sum u_n x^n$ à un rayon de convergence $\rho_S > 0$ . donc si $\left|\dfrac{1}{p}\right| < \rho_S$ la série $\sum \left( \displaystyle\int_0^{+\infty} \left| u_n \frac{t^n}{n!} e^{-pt} \right| dt \right)$ converge et on peut intégrer termes à termes les intégrales étant convergentes.
Toutes les hypothèses du **III.C** sont vérifiées**.** On a donc **:**
$$\frac{p-a}{p} S\left(\frac{1}{p}\right) - u_0 = \frac{b}{p-1}$$
On pose $x = \dfrac{1}{p}$ . Pour $x > 0, x < \rho_S$ et $x < \dfrac{1}{a}$ on a
$$(1-ax)S(x) = u_0 + \frac{bx}{1-x}$$
Soit
$$S(x) = \frac{u_0}{1-ax} + \frac{bx}{(1-x)(1-ax)}$$
ce qui est la même expression qu'en **I.E.**

## Partie IV. Une récurrence explosive

**IV.A.1.** On a
$$u^2 + v^2 - 2uv = (u-v)^2 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad u^2 + v^2 + 2uv = (u+v)^2 \geq 0\,.$$
d'où le résultat.
**IV.A.2.** Si un $\omega(n)$ est nul alors $u_n$ et $v_n$ sont nuls . (somme de réels positifs nulle) . On reporte dans le système
$$\begin{cases} anu_{n-1} + bv_{n-1} = 0 \\ cu_{n-1} + dnv_{n-1} = 0 \end{cases}$$
de déterminant $adn^2 - bc$ . L'hypothèse "$\dfrac{bc}{ad}$ n'est pas le carré d'un entier" assure que ce déterminant est non nul . Le système est donc de Cramer est $u_{n-1} = v_{n-1} = 0$ . Une récurrence descendante rapide donne $u_0 = v_0 = 0$ . Ce qui absurde vu le sujet.
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\, \omega(n) > 0}$$

On calcule

$$\begin{aligned}\omega(n+1) &= u_{n+1}^2+v_{n+1}^2=(anu_n+bv_n)^2+(cu_n+dnv_n)^2\\ &= n^2\left(a^2u_n^2+d^2v_n^2\right)+2\,(ab+cd)\,n\,u_nv_n+b^2v_n^2+c^2u_n^2\ .\end{aligned}$$

Comme $2\,|u_nv_n|\leq u_n^2+v_n^2=\omega(n)$, on peut majorer :

$$\omega(n+1)\leq\ n^2\,\omega(n)\max\{a^2,d^2\}+|ab+cd|\,n\,\omega(n)+\ \omega(n)\max\{b^2,c^2\}$$

donc comme $n^2\omega(n)>0$

$$\frac{\omega(n+1)}{n^2\omega(n)}\leq\ \max\{a^2,d^2\}+\frac{|ab+cd|}{n}+\frac{\max\{b^2,c^2\}}{n^2}$$

De même, $\omega(n+1)\geq\ n^2\,\omega(n)\min\{a^2,d^2\}-|ab+cd|\,n\,\omega(n)+\omega(n)\min\{b^2,c^2\}$ et donc

$$\frac{\omega(n+1)}{n^2\omega(n)}\geq\min\{a^2,d^2\}-\frac{|ab+cd|}{n}+\frac{\min\{b^2,c^2\}}{n^2}$$

**IV.B.1.**On a comme $b\neq 0$ $\sum v_nz^n=\dfrac{1}{b}\left(\sum u_{n+1}z^n-a\sum nu_nz^n\right)$ . On sait (théorème de dérivation) que la série $\sum nu_nz^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum u_nz^n$ . D'autre part $\sum u_{n+1}z^n=\sum u_nz^{n-1}$ à le même rayon de convergence que $\sum u_nz^n$ , donc par le théorème sur la somme le rayon de convergence de $\sum v_nz^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum u_nz^n$ .
La seconde relation donne (symétriquement) l'autre inégalité. Les deux séries ont même rayon de convergence $\rho'$
Selon l'indice du sujet introduisons $\omega(n)$ :
Si $|z|<\rho'$ , $\sum u_nz^n$ et $\sum v_nz^n$ converge donc $\sum\left(|u_n|+|v_n|\right)z^n$ converge ;
Mais $u_n^2+v_n^2=|u_n|^2+|v_n|^2\leq\left(|u_n|+|v_n|\right)^2$ , donc la série $\sum\sqrt{w(n)}z^n$ converge.
Mais pour cette série la règle de D'Alembert donne pour $z\neq 0$

$$\lim\left(\left|\frac{\sqrt{\omega(n+1)}z^{n+1}}{\sqrt{w(n)}z^n}\right|\right)=\lim\left(n\sqrt{\frac{w(n+1)}{n^2w(n)}}\,|z|\right)\geq\lim\left(n\sqrt{\alpha(n)}\,|z|\right)=+\infty$$

car le minorant $\alpha(n)$ tend vers une limite strictement positive.
Donc elle ne peut pas converger pour $z\neq 0$ . Donc :

$$\boxed{\text{les deux séries } \sum u_nz^n \text{ et } \sum v_nz^n \text{ ont des rayons de convergence nuls}}$$