

partie I : généralités

1.

a) on a : $\forall t \in \mathbb{R}, x(-t) = -x(t), y(-t) = -y(t)$. Γ est invariante par symétrie par rapport à O .

b) La courbe est C^∞ sur \mathbb{R}

On a $M'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Tous les points sont réguliers. On a $M''(t) = \begin{pmatrix} -2t \sin(t^2) \\ 2t \cos(t^2) \end{pmatrix}$ et donc

$$\det(M'(t), M''(t)) = 2t$$

Tous les points sont biréguliers sauf $M(0) = O$

c) En $t = 0$, $\det(M'(t), M''(t))$ est nul et change de signe : point d'inflexion

d) Comme tout point est régulier:

- on a une tangente verticale si et seulement si $x'(t) = 0$ soit $\exists k \in \mathbb{N}, t = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$
- on a une tangente horizontale si et seulement si $y'(t) = 0$ soit $\exists k \in \mathbb{N}, t = \pm \sqrt{k\pi}$

2.

a) On a $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1$ et donc $s(t) = t$

b) On a $\vec{T}(t) = \frac{M'(t)}{\|M'(t)\|} = M'(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{pmatrix}$ et $\vec{N}(t) = R_{\pi/2}(\vec{T}) = \begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$

c) enfin on sait que $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$. Ce qui donne $\frac{dt}{ds} \frac{d\vec{T}}{dt} = \gamma \vec{N}$ soit $\begin{pmatrix} -2t \sin(t^2) \\ 2t \cos(t^2) \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -\sin(t^2) \\ \cos(t^2) \end{pmatrix}$ et donc $\gamma = 2t$.

Et donc pour $t \neq 0$ $R = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2t}$

On retrouve que la courbure est nulle uniquement si $t = 0$, et donc que O est le seul point non birégulier.

3.

a) On remarque que $|e^{iu^2}| = 1$. la fonction $u \mapsto e^{iu^2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. L'intégrale étudiée sera semiconvergente.

On a déjà que $u \mapsto e^{iu^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Pour l'étude de la convergence on peut faire le changement de variable $v = u^2$ suivi d'une intégration par partie, ou faire directement une intégration par partie pour augmenter le degré du dénominateur en posant $U = \frac{e^{iu^2}}{2i}$ et $V = \frac{1}{u}$ qui sont C^1 sur \mathbb{R}

$$\begin{aligned} \int_1^X e^{iu^2} du &= \int_1^X \frac{1}{u} (ue^{iu^2}) du = \left[\frac{e^{iu^2}}{2iu} \right]_1^X + \int_1^X \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} du \\ &= \frac{e^{iX^2}}{2iX} - \frac{e^i}{2i} + \int_1^X \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} du \end{aligned}$$

or $\left| \frac{e^{iX^2}}{2iX} \right| = \frac{1}{2X}$ de limite nulle en $+\infty$ et $\left| \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} \right| = \frac{1}{2u^2}$ ce qui assure l'intégrabilité de $u \mapsto \frac{e^{iu^2}}{2iu^2}$ sur $[1, +\infty[$

Par passage à la limite $\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge et :

$$\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du = \frac{ie^i}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{e^{iu^2}}{2iu^2} du$$

b) $\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge, donc aussi $\int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$ car $u \mapsto e^{iu^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

Si une intégrale à valeurs complexes converge, ses parties réelles et imaginaires convergent aussi et donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (M(t)) = \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} \cos(u^2) du \\ \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du \end{pmatrix}$$

Partie II : calcul des intégrales impropres.

1.

a) $t \rightarrow \int_1^t e^{iu^2} du$ est une primitive de la fonction (continue sur \mathbb{R}) $t \rightarrow e^{it^2}$, la fonction est donc C^1 sur \mathbb{R} de dérivée $t \rightarrow e^{it^2}$.

f est le carré d'une fonction C^1 sur \mathbb{R} donc f est C^1 sur \mathbb{R} de dérivée $t \rightarrow 2e^{it^2} \int_0^t e^{iu^2} du$

b) $t \rightarrow \int_0^1 \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2} du$ est une intégrale à paramètre. On vérifie les hypothèses du théorème de Leibniz:

- $\forall u \in [0, 1]$, $t \rightarrow \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}$ est C^1 sur \mathbb{R} de dérivée $t \rightarrow 2ite^{it^2(1+u^2)}$
- $\forall t \in \mathbb{R}$ $u \rightarrow \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}$ et $u \rightarrow 2ite^{it^2(1+u^2)}$ sont continue sur le **segment** $[0, 1]$ donc y sont intégrables.
- On a domination de la dérivée sur tout segment $[a, b]: \forall (u, t) \in [0, 1] \times]\varnothing,]$, $\left| 2ite^{it^2(1+u^2)} \right| = 2|t| \leq 2 \max(|a|, |b|)$ (indépendant de t et intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur ce segment)
- donc $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g'(t) = \int_0^1 2ite^{it^2(1+u^2)} du$

c) pour $t \neq 0$ le changement de variable C^1 bijectif $u = tU$, dans f' donne :

$$f'(t) = 2e^{it^2} \int_0^1 e^{i(tU)^2} t dU = \int_0^1 2te^{it^2(1+U^2)} dU$$

On a donc $\forall t \neq 0$, $g'(t) = if'(t)$. , si $t = 0$ les deux dérivées sont nulles et l'égalité est encore vrai.

On a donc $if - g$ constante. Or $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, if(t) - g(t) = -\pi/4}$$

2. Pour l'étude au voisinage de $+\infty$, on suppose dans cette question $t > 0$.

a) On fait apparaître du t au dénominateur en posant:

$$\frac{u^2 e^{it^2 u^2}}{1+u^2} = \left(\frac{u}{1+u^2} \right) \left(u e^{it^2 u^2} \right)$$

et comme $\int u e^{it^2 u^2} du = \frac{e^{it^2 u^2}}{2it^2}$, on intègre par partie en posant $U = \frac{u}{1+u^2}$, $V = \frac{e^{it^2 u^2}}{2it^2}$ fonctions C^1 sur $[0, 1]$ (car $t \neq 0$). comme $U' = \frac{(1+u^2) - 2u^2}{(1+u^2)^2}$ on a

$$\int_0^1 \frac{u^2 e^{it^2 u^2}}{1+u^2} du = \frac{e^{it^2}}{4it^2} - \int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \frac{e^{it^2 u^2}}{2it^2} du$$

Comme $\left| \frac{e^{it^2}}{4it^2} \right| = \frac{1}{4t^2}$ on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{it^2}}{4it^2} \right) = 0$

De plus la majoration (qui est possible car $u \rightarrow \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \frac{1}{2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$) :

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \frac{e^{it^2 u^2}}{2it^2} du \right| \leq \frac{1}{t^2} \int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \frac{1}{2} du$$

montre que $\int_0^1 \frac{(1-u^2)}{(1+u^2)^2} \frac{e^{it^2 u^2}}{2it^2} du$ tend vers 0.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{u^2 e^{it^2 u^2}}{1+u^2} du \right) = 0$$

b) Comme $t > 0$ le changement de variable C^1 bijectif $U = tu$ donne

$$\int_0^1 e^{it^2 u^2} du = \frac{1}{t} \int_0^t e^{iU^2} dU$$

Par convergence de l'intégrale on sait que $\int_0^t e^{iU^2} dU$ admet une limite finie en $+\infty$ et donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 e^{it^2 u^2} du \right) = 0$$

et donc comme

$$\int_0^1 e^{it^2 u^2} du = \int_0^1 \frac{e^{it^2 u^2}}{1+u^2} du + \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} e^{it^2 u^2} du$$

on a aussi :

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 \frac{e^{it^2 u^2}}{1+u^2} du \right) = 0}$$

3. En écrivant

$$g(t) = e^{it^2} \int_0^1 \frac{e^{it^2 u^2}}{1+u^2} du$$

on trouve que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (g(t)) = 0$ et donc avec II.1) $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = i\frac{\pi}{4}$ et donc $(I_1 + iI_2)^2 = i\frac{\pi}{4}$. On a donc

$$(I_1^2 - I_2^2) + 2iI_1I_2 = i\pi/4$$

On a donc $I_1I_2 = +\frac{\pi}{8}$ et $|I_1| = |I_2|$ et donc $I_1 = I_2 = \pm\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ (car ce sont des réels)

4. Pour $n \geq 0$ on peut faire dans l'intégrale le changement de variable $t = u^2$ C^1 bijectif

$$u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(u^2) du = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t) \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

Si $n = 0$ on a une intégrale impropre qui converge par changement de variable C^1 bijectif. Pour éviter de traiter 2 cas j'intègre pour tout n sur $]n\pi, (n+1)\pi[$

- sur $]n\pi, (n+1)\pi[$, $\sin(t)$ est du signe de $(-1)^n$ et \sqrt{t} est positif. Donc $u_n \cdot u_{n+1} < 0$
- On a $|u_n| = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t) \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ car la fonction est de signe constant sur $]n\pi, (n+1)\pi[$.
- On a donc $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)| \frac{dt}{2}$. L'intégrale est constante (intégrale d'une fonction périodique sur une période) et donc $\lim (u_n) = 0$
- Enfin en posant $t = T + \pi$

$$|u_{n+1}| = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} |\sin(t)| \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(T) \frac{dt}{2\sqrt{T+\pi}} \leq |u_n|$$

- La suite (un) est de signe alternée et la suite $(|u_n|)$ décroît vers 0 .

On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées : la série $\sum u_n$ converge et sa somme est du signe du premier terme.

Or $S_N = \sum_{n=0}^N u_n = \int_0^{\sqrt{(N+1)\pi}} \sin(u^2) du$ converge vers I_2 . On a donc $I_2 > 0$ et donc :

$$I_1 = I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Partie III : calcul numérique

1. Les deux fonctions sin et cos sont développables en série entière sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En remplaçant x par u^2 on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \cos(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{4n}}{(2n)!}, \sin(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

Les deux expressions obtenues sont encore des séries entières sur \mathbb{R} . Leur primitives sont donc aussi développables en série entière sur \mathbb{R} et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{(4n).(2n)!}, y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(4n+2)(2n+1)!}$$

On a donc :

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n \frac{t^{4n+1}}{(4n+1).(2n)!}, v_n = (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

2. On remarque que les deux suites (u_n) et (v_n) sont de signe alternée , et de limite nulle (car les séries convergent).

De plus si $t^2 \leq 2n$

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= t^4 \cdot \frac{4n+1}{4n+5} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq (2n)^2 \frac{4n+1}{4n+5} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\leq \frac{4n+1}{4n+5} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n}{2n+2} < 1 \end{aligned}$$

et

$$\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = t^4 \cdot \frac{4n+2}{4n+6} \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} < 1$$

Les deux séries vérifient donc les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang $n_0 = E\left(\frac{t^2}{2}\right) + 1$. On a donc :

$$\forall n \geq n_0, |x - x_n| \leq |u_{n+1}| \leq |u_n| \text{ et } |y - y_n| \leq |v_n|$$

et donc si $|u_n| \leq \varepsilon$ et $|v_n| \leq \varepsilon$ on a

$$\forall n \geq n_0, (|u_n| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n| \leq \varepsilon) \implies (|x - x_n| \leq \varepsilon \text{ et } |y - y_n| \leq \varepsilon)$$

La suite de la partie demandait un programme en pascal (langage utilisé avant Maple en prépa) et commente les valeurs obtenues.

Pour tracer Γ on remarque que $I_1 = I_2 \simeq 0,627$, et que $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ est le premier point à tangente verticale et $t = \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$ est le troisième.

d'après II.4 la série étant alternée les valeurs de $y(\sqrt{n\pi})$ et $y(\sqrt{(n+1)\pi})$ encadrent I_2 donc l'ordonnée du point limite ($t \rightarrow +\infty$) . Ces points sont les points à tangente horizontale.

Remplacer sin par cos ne change pas l'étude de la série : l'abscisse des points à tangente verticale encadrent aussi l'abscisse du point limite. La branche infinie est une spirale.

partie 4 : Etude d'une propriété métrique

On constate que Γ vérifie la propriété pour $k = 1/2$.

Pour parler du rayon de courbure on supposera la courbe birégulière et pas seulement régulière en tout point $M \neq O$

On a besoin de dériver une fois pour avoir \vec{T} et de dériver \vec{T} . On supposera donc la courbe C^2 .

Avec ces précisions l'abscisse curviligne est un paramétrage admissible. On cherchera x, y en fonction de s en introduisant $\alpha = \left(i, \vec{T}\right)$

$$1. \text{ On a alors } \vec{T} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dy/ds \end{pmatrix} \text{ et } \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{d\vec{T}}{d\alpha} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{N} \text{ donc } R = \frac{ds}{d\alpha}$$

On a donc l'équation différentielle $\frac{ds}{d\alpha} = \frac{k}{s}$ donc $s^2 = 2k(\alpha - \alpha_0)$. La condition initiale donne en O : $s = 0$ et $\alpha = 0$ et donc $\frac{s^2}{2k} = \alpha$ (possible $k \neq 0$)

Or $\frac{dx}{ds} = \cos(\alpha) = \cos\left(\frac{s^2}{2k}\right)$ et donc comme $x = 0$ si $s = 0$ on a $x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma$ et de même on a :

$$\boxed{x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma, y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma}$$

2. Soit $P_k(s)$ le point de C_k . Le changement de variable C^1 bijectif $u = \frac{\sigma}{\sqrt{2k}}$ donne $P_k(s) = \sqrt{2k}M\left(\frac{s}{\sqrt{2k}}\right)$. La courbe C^k se déduit de Γ par homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2k}$.

Remarque : On retrouve bien $C_{1/2} = \Gamma$

Complément : si on cherche toutes courbes solutions on aura :

$$x(s) = \int_{s_0}^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma, y(s) = \int_{s_1}^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma$$

ce qui donne

$$x(s) = \int_{s_0}^0 \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma + \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma, y(s) = \int_{s_1}^0 \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma + \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma$$

On a donc une courbe qui se déduit par translation de la courbe :

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma, y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k} + \alpha_0\right) d\sigma$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x(s) &= \cos(\alpha_0) \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma - \sin(\alpha_0) \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma \\ y(s) &= \sin(\alpha_0) \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma + \cos(\alpha_0) \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2k}\right) d\sigma \end{aligned}$$

qui est l'image de C_k par rotation.

Toutes les courbes se déduisent de C_k par rotation et/ou translation.