SERIE P

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Vendredi 29 mai 1992 de 8 h à 12 h

ATTENTION : *Votre copie est destinée à être corrigée et notée.*
Il sera tenu compte de la qualité de la présentation et de l'orthographe.

On se propose dans ce problème d'étudier la courbe Γ admettant par rapport à un repère orthonormal du plan la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos u^2 \, du \\ \\ y(t) = \int_0^t \sin u^2 \, du \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Partie I : Généralités

On note $M(t)$ le point de Γ de paramètre t.

1) a) La courbe Γ admet-elle des éléments de symétrie ?

b) Pour quelles valeurs de t le point $M(t)$ est-il régulier ? birégulier ?

c) Etudier Γ au voisinage du point $M(0)$.

d) Pour quelles valeurs de t la tangente en $M(t)$ est-elle verticale ? horizontale ?

2) On oriente Γ suivant les "t croissants".
Déterminer en fonction de t :

a) l'abscisse curviligne s d'origine $M(0)$.

b) Les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{N}$ du repère de Frénet au point $M(t)$.

c) Le rayon de courbure R au point $M(t)$ lorsque $t \neq 0$.

3) a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{iu^2}\,du$ est convergente.

b) En déduire que les fonctions x et y admettent des limites finies notées I_1 et I_2, en $+\infty$.

Partie II : **Calcul des limites I_1 et I_2**

1) a) Montrer que la fonction $f(t) = \left[\int_0^t e^{iu^2}\,du\right]^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que la fonction $g(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{it^2(1+u^2)}}{1+u^2}\,du$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

c) Déduire de a) et b) une relation entre les fonctions f et g.

2) a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 \frac{u^2 e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,du = 0.$$

b) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 e^{it^2u^2}\,du$ et en déduire $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{it^2u^2}}{1+u^2}\,du$.

3) En déduire que : $I_1 = I_2$, et donner la valeur de $|I_1|$.

4) Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin u^2\,du$ est une série alternée convergente.
Donner la valeur de I_1 et I_2.

Partie III : **Calcul numérique et tracé de Γ**

1) Développer en série entière les fonctions x et y en précisant les rayons de convergence.

2) On se propose d'utiliser les deux développements précédents pour calculer des valeurs approchées de x(t) et y(t) pour t strictement positif <u>fixé</u>.

On pose : $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$, avec : $\forall n \in \mathbb{N}\quad u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$,

et pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad x_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $y_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Pour tout ε strictement positif donné, montrer que si : $n \geqslant \frac{t^2}{2}$ et $|u_n| < \varepsilon$ et $|v_n| < \varepsilon$, alors x_n et y_n sont des valeurs approchées à ε près, respectivement de $x(t)$ et $y(t)$.

3) Rédiger un programme PASCAL permettant le calcul de $x(t)$ et $y(t)$ à 10^{-4} près, en respectant les points suivants :

* la valeur de t est lue

* l'affichage doit comporter, outre les valeurs de x_n et y_n, celles de n et de $M = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} (|u_k|, |v_k|)$, ceci afin d'estimer les erreurs d'arrondi

* n'employer ni la fonction factorielle, ni la fonction puissance

* préciser l'utilisation de chaque variable déclarée.

4) Un programme du type précédent a donné les résultats suivants :

Pour $t = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$	x = 0.8331	y = 0.2220	n = 3	M = 0.89
$t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	x = 0.9775	y = 0.5493	n = 4	M = 1.3
$t = \sqrt{\frac{5\pi}{2}}$	x = 0.8031	y = 0.6159	n = 13	M = 70
$t = \sqrt{\frac{9\pi}{2}}$	x = 0.7591	y = 0.6222	n = 21	M = 2.0 E+4
$t = \sqrt{\frac{13\pi}{2}}$	x = 1.2006	y = 0.4944	n = 30	M = 7.4 E+6

Commenter ces résultats sachant que l'on travaille avec 7 à 8 chiffres significatifs.

5) Tracer Γ. (On ne demande pas l'étude des variations de x et y).

Partie IV : Etude d'une propriété métrique

Pour tout réel k non nul donné, on considère la courbe C_k régulière, ayant le point 0 pour origine des abscisses curvilignes avec une tangente horizontale et vérifiant, en tout point différent de l'origine 0, la condition : $R = \frac{k}{s}$, où s est l'abscisse curviligne et R le rayon de courbure.

1) Donner une représentation paramétrique de C_k.

2) Comment la courbe C_k se déduit-elle de la courbe Γ ?
