Concours national marocain
2009 Math 2 PSI
approximation au sens des moindres carrés

1ere PARTIE : Polynômes de Lagrange

1. Le polynôme R est de degré au plus n et admet $n+1$ racines. il est donc nul.
2. Pour tout x_i on a bien :

$$\forall (P,Q) \in \mathcal{P}_n^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \ , \ (\lambda P + \mu Q))(x_i) = \lambda P(x_i) + \mu Q(x_i)$$

La linéarité est vérifiée pour chaque coordonnée de l'image de f_m, donc aussi pour f_m

3. **(a)** Un polynôme P est dans le noyau de f_m si et seulement si il admet les $(x_i)_{i=0}^n$ comme racines. Donc si et seulement si il est divisible par $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = \Pi$

P est dans le noyau de f_m si et seulement si il s'écrit $P = Q\Pi$, avec $d^\circ(Q) = d^\circ(P) - d^\circ(\Pi) \leq m - (n+1)$.

(b) On a bien deux sous espaces vectoriels de $\mathcal{P}_m$. De plus d'après le théorème de division euclidienne (de P par Π) on sait que tout polynôme P se décompose de façon unique sous la forme

$$P = \Pi Q + R \text{ , avec } d^\circ(R) < n+1$$

et donc $d^\circ(Q) \leq d^\circ(P) - d^\circ(\Pi)$ donc tout élément de $\mathcal{P}_m$ se décompose de façon unique en somme d'un élément de $\mathrm{Ker}\,(f_m)$ et d'un élément de $\mathcal{P}_n$. Les deux sous espaces sont supplémentaires.

(c) D'après le théorème sur la dimension de sous espaces supplémentaires , on a :

$$m+1 = \dim(\mathrm{Ker}\,(f_m)) + (n+1)$$

et donc:

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(f_m)) = m - n}$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f_m)$ est $\left(\Pi, X\Pi, \cdots X^{m-n-1}\Pi\right)$. Cette famille est de bon cardinal est génératrice d'après **3(a)**. Si $Q = \sum_{i=0}^{m-n-1} q_i X^i$ on a $Q\Pi = \sum_{i=0}^{m-n-1} q_i\left(X^i\Pi\right)$

(d) D'après le théorème du rang on a comme $\mathcal{P}_m$ est de dimension finie

$$m+1 = rg(f_m) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f_m))$$

on a donc $rg(f_m) = n+1 = \dim\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

$$\boxed{\text{si } m \geq n+1 \text{ , } f_m \text{ est surjective.}}$$

4. **(a)** Comme à la question précédente, un polynôme P est dans le noyau de f_m si et seulement si il est divisible par Π . Mais maintenant $d^\circ(\Pi) > d^\circ(P)$ donc $P = 0$.

Le noyau de f_m est réduit à 0.

$$\boxed{f_m \text{ est injective}}$$

(b) D'après le théorème du rang $rg(f_m) = m+1$.

$$\boxed{\begin{array}{r} \text{si } m = n \text{ , } f_m \text{ est surjective} \\ \text{si } m < n \text{ , } f_m \text{ n'est pas surjective} \end{array}}$$

5. Il n'y a pas de problèmes de dénominateur nul car les (x_i) sont deux à deux distincts.

(a) Les polynômes L_i sont le produit de n facteurs de degré 1 . $d^\circ(L_i) = n$

Si $k \neq i$ dans $L_i(x_k)$ il y a un facteur $(x_k - x_k) = 0$ pour $j = k$ et donc $L_i(x_j) = 0$

Par contre $L_i(x_i) = \prod_{i \neq j}\left(\frac{x_i - x_j}{x_i - x_j}\right) = 1$

(b) On a donc $f_n(L_i) = (0, \cdots 0, 1, 0 \cdots 0)$, le 1 étant en position $i+1$. La famille $(f_n(L_i))_{i=0}^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) On est dans le cas de la question **4.** avec $m = n$. f_n est linéaire, injective et surjective. C'est donc un isomorphisme et l'image réciproque d'une base est une base.

$$\boxed{(L_i)_{i=0}^n \text{ est une base de } \mathcal{P}_n}$$

(d) Puisque f_n est bijective tout élément y de $\mathbb{R}^{n+1}$ admet un unique antécédent , que le sujet note P_y .

Comme on a un base, on a une unique décomposition :

$$P_y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i$$

La valeur en x_j donne :

$$\begin{aligned} P_y(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_j) \\ y_j &= \lambda_j + \sum_{i \neq j} 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_y = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i}$$

2eme PARTIE , A

1. D'après le **I.5** le polynôme $Q_0 = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$ est une solution du problème. (il est de degré $\leq n$ donc $\leq m$ vue l'hypothèse du sujet)

   On a alors $\phi_m(Q_0) = \sum_{i=0}^{n} 0 = 0$

2. Comme pour tout polynôme P , $\phi_m(P) \geq 0 = \phi_m(Q_0)$ le minimum de ϕ_m est nul et

   $$\phi_m(P) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [[0, n]] , P(x_i) = y_i \Leftrightarrow \forall i \in [[0, n]] , (P - Q_0)(x_i) = 0$$

   et donc :

   $$\boxed{\phi_m(P) = 0 \Leftrightarrow P \in Q_0 + \mathrm{Ker}(f_m)}$$

2eme PARTIE , A

On ferra attention que si $m < n$ la matrice A n'est pas carrée (donc ce n'est pas toujours une matrice de Van der Monde)
On peut convenir de numéroter les lignes entre 1 et $n+1$ ou entre 0 et n , à condition d'être cohérent tout au long du devoir.
J'ai choisi un indice entre 0 et n .

1. Questions de cours de sup.

   - Si $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ on a $M + N = S$ avec $\forall (i, j) \in [[1, p]] \times [[1, q]]$, $s_{i,j} = m_{i,j} + n_{i,j}$ et ${}^tM +^t N = T$ avec $\forall (i, j) \in [[1, q]] \times [[1, p]]$,$t_{i,j} = m_{j,i} + n_{j,i}$ donc $T = {}^tS$
   - On vérifie que les produits sont possibles puis on écrit que si $M' = (m_{i,j})$ et $N' = (n_{i,j})$ on a $M'N' = P$ avec $\forall (i, j) \forall (i, j) \in [[1, p]] \times [[1, r]]$, $p_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} m_{i,k} n_{k,j}$ et ${}^tN'{}^tM' = Q$ avec $\forall (i, j) \in [[1, r]] \times [[1, p]] , q_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} n_{k,i} m_{j,k}$ donc $Q = {}^tP$

2. AV est une matrice colonne de $\boldsymbol{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$et $(AV)_i = \sum_{j=0}^{m} v_j x_i^j = P_v(x_i)$

   On a donc :

   $$Av = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [[1, n]] , P_v(x_i) = 0 \Leftrightarrow P_v \in \mathrm{Ker}(f_m)$$

   comme $m \leq n$ on est dans le cas de **I.4** et donc f_m est linéaire injective . Donc $P_v = 0$ et donc tous les coefficients de P_v sont nuls. Soit $V = 0$

   $$\boxed{\forall v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}) \text{ , } Av = 0 \Leftrightarrow v = 0}$$

3. On a que ${}^t u.u$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ d'unique coefficient

$$x = \sum_{k=0}^{n} \left({}^t u\right)_{1,k} (u)_{k,1} = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k^2$ est une somme de réels positifs donc ${}^t u.u \geq 0$
- Si $u = 0$ tous les u_k sont nuls et donc ${}^t u.u = 0$
- Si ${}^t u.u = 0$, on a une somme de réels positifs qui est nulle. Chaque terme est nulle et donc $u = 0$

$$\boxed{\forall u \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \ \ , {}^t u.u = 0 \Leftrightarrow u = 0}$$

4.

- **(a)** On a :

$${}^t u.u = {}^t(Av)(Av) = {}^t v {}^t AAv = {}^t v.0 = 0$$

D'après la question **3** on a $u = Av \in \mathcal{M}_{n+1}, 1(\mathbb{R})$ et ${}^t u.u = 0$ donc $u = 0$ soit $Av = 0$ et donc comme $v \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ d'après la question **2** $v = 0$

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}) \ , {}^t AAv = 0 \Rightarrow v = 0}$$

(b) Comme $A \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R})$ on a ${}^t A \in \mathcal{M}_{m+1,n+1}(\mathbb{R})$ et donc ${}^t AA \in \mathcal{M}_{m+1,m+1}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^t A.A$ est bien une matrice carrée. De plus d'après le point précédent son noyau est réduit à $\{0\}$ son rang est donc $m+1-0 = m+1$. Elle est donc inversible.

(c) On a :

$$\forall (i,j) \in [[0,m]]^2 \ \ , \ \left({}^t A.A\right)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} \left({}^t A\right)_{ik} A_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{k,i} A_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in [[0,m]]^2 \ \ , \ \left({}^t A.A\right)_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+j}}$$

5. On vient de voir que M est inversible . Le système linéaire $MZ = c$ est donc de Cramer et

$$\boxed{Z = M^{-1}c}$$

Remarque : $M = {}^t A.A$ est inversible , mais ${}^t A$ ou A ne le sont pas (non carrée) , .Elle ne sont même pas régulière.

6. **(a)** On a :

$$g(v) = {}^t(b - Av)(b - Av) = \left({}^t b - {}^t v {}^t A\right)(b - Av) = {}^t bb - {}^t bAv - {}^t v {}^t Ab + {}^t v {}^t AAv$$

En particulier

$$g(w) = {}^t bb - {}^t bAw - {}^t w {}^t Ab + {}^t w \left({}^t AAw\right)$$

Or par définition de w on a : ${}^t AAw = {}^t Ab$ et donc :

$$g(w) = {}^t bb - {}^t bAw - {}^t w {}^t Ab + {}^t w {}^t Ab = {}^t bb - {}^t bAw$$

(b) Ce qui donne :

$$g(v) - g(w) = \left({}^t bb - {}^t bAv - {}^t v {}^t Ab + {}^t v {}^t AAv\right) - \left({}^t bb - {}^t bAw\right) = -{}^t bAv - {}^t v {}^t Ab + {}^t v {}^t AAv + {}^t bAw$$

à comparer à :

$$\begin{aligned}
{}^t(w - v){}^t AA(w - v) &= \left({}^t w - {}^t v\right)\left({}^t AAw - {}^t AAv\right) = {}^t v {}^t AAv - {}^t w {}^t AAv - {}^t v {}^t AAw + {}^t w {}^t AAw \\
&= {}^t v {}^t AAv - \left({}^t w {}^t AA\right) v - {}^t v \left({}^t AAw\right) + {}^t \left({}^t AAw\right) w \\
&= {}^t v {}^t AAv - {}^t \left({}^t AAw\right) v - {}^t v \left({}^t AAw\right) + {}^t\left({}^t AAw\right) w \\
&= {}^t v {}^t AAv - {}^t \left({}^t Ab\right) v - {}^t v {}^t Ab + {}^t bAw \text{ (car } {}^t AAw = {}^t Aw)
\end{aligned}$$

Remarque : dans l'un ou l'autre des calculs vous risquez d'avoir un problème les termes n'étant pas ceux voulus. Sauf erreur de calcul c'est un simple problème de transposition : Toute matrice de taille 1 est égale à sa transposé. En rédigeant cette remarque on a par exemple : ${}^t bAw = {}^t\left({}^t bAw\right) = {}^t w^t Ab$

(c) On peut alors appliquer la question **3 à** $v' = A(w-v)$. On a une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}, 1(\mathbb{R})$ et donc $g(v)-g(w) =^t v'.v' \geq 0$ et $(g(v)-g(w)=0 \Leftrightarrow v'=0)$. Or $w' = w - v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ donc d'après la question **2**, $Aw' = 0 \Leftrightarrow w' = 0$

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{M}_{n+1}, 1(\mathbb{R})\ ,\ g(v) \geq (w) \text{ et } g(v) = g(w) \Leftrightarrow v = w}$$

7. porte sur un produit scalaire

8. On sait que $AV_p = (P(x_i))_{i=0}^n$, donc $b - AV_p = (y_i - P(x_i))_{i=0}^n$. On a donc

$$g(V_P) = {}^t(b - AV_p)(b - AV_p) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2 = \phi_m(P)$$

9. On a donc

$$\phi_m(P) = g(V_p) \geq g(w) = \phi_m(P_w)$$

et

$$\phi_m(P) = \phi_m(P_w) \Leftrightarrow g(V_P) = g(w) \Leftrightarrow V_p = w$$

Or les coordonnées de V_p (respectivement de w) sont les coefficients de P (de P_w) donc

$$V_p = w \Leftrightarrow P = P_w$$

$$\boxed{\text{Le minimum de } \phi_m \text{ est atteint uniquement pour } P_w \text{ et il vaut } \lambda_m = g(w)}$$

10. Qui peut s'écrire $g(w) = \phi_m(P_w) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_w(x_i))^2 = \|b - Aw\|^2$

11. Le sujet de concours a été modifié en DS . J'ai pris $n = 2$ pour ne pas avoir une solution exacte à la fin.

On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\ ,\ M = {}^t AA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ c = {}^t Ab = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a le système en divisant toutes les lignes par 2

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +3z & = & 2 \\ x & +3y & +4z & = & 0 \\ 3x & +4y & +9z & = & 1 \end{array}\right.$$

On prend la seconde ligne comme pivot:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +4z & = & 0 \\ & -5y & -5z & = & 2 \\ & -5y & -3z & = & 1 \end{array}\right.$$

On retranche $L2$ à $L3$

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +4z & = & 0 \\ & -5y & -5z & = & 2 \\ & & 2z & = & -1 \end{array}\right.$$

et donc $(x, y, z) = (17/10, 1/10, -1/2)$

Ce qui donne

$$\boxed{P_w = \frac{-x^2}{2} + \frac{x}{10} + \frac{17}{10}}$$

12. le minimum $\lambda_2 = (1 - P_w(-1))^2 + (2 - P_0(0))^2 + (1 - P_w(1))^2 + (0 - P_0(2))^2 = \dfrac{1}{5}$