e3a – Concours ENSAM - ESTP - Archimède (partielle)

Épreuve de Mathématiques A PSI

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours

Question 1.

Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies, ou fausses ? En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre-exemple.

1. (u_n) converge vers $0 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow (u_n)$ converge vers 0.

3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

4. $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 0} |u_n|$ converge.

Question 2.

Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

Préliminaires :

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |t_n| \leq \varepsilon.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k$.

1. On écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > N$,

$$T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} t_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n} t_k.$$

   1. Prouver que : $\left|\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leq n\varepsilon$.
   2. En déduire que la suite (T_n) converge vers 0.

2. Prouver alors le cas général : "Si (t_n) converge vers T, alors (T_n) converge aussi vers T."
   On pourra par exemple utiliser la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = t_n - T$.

3. On prend dans cette question : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \cos(n\theta)$, $\theta \in]0, 2\pi[$, fixé.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1} \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

2. La suite (T_n) converge-t-elle ?
3. On prend ici $\theta = \frac{\pi}{3}$. La suite (t_n) converge-t-elle ?
4. Conclure.

Partie 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que :
$(i)\quad \lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0.$

1. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leq \frac{K}{n}.$$

2. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0,1[$.

   On note alors $f(x)$ sa somme : $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Désormais, on suppose <u>de plus</u> que :

   $(ii)\quad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = L \in \mathbb{R}.$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

   Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

4.
   1. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup\limits_{k\geq n}(|ka_k|)$.
   2. Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?
5. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ |u_n| \leq |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k| \left(1 - x^k\right) + \frac{1}{n(1-x)} M_n$$

   puis que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[,\ |u_n| \leq |L - f(x)| + (1-x) \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \frac{1}{n(1-x)} M_n.$$

6. On prend $x = 1 - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   En utilisant tout ce qui précède, y compris les préliminaires, prouver alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
7. Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction f.