CCP 2006 PC Maths 2

PARTIE I

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(m) = (m+1)\dots(m+n) = \dfrac{(m+n)!}{m!}$, formule qui reste vrai si $n = 0$.

$$\boxed{\forall \{n,m\} \in \mathbb{N}^2 \ , P_n(m) = \frac{(m+n)!}{m!}}$$

2. Soit $u_n(x) = \dfrac{2(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}$, le terme général de la série . Comme $\alpha \notin \mathbb{Z}^{-*}$, $P_n(\alpha)$ n'est jamais nul et donc $u_n(x)$ est défini . $f_\alpha(x)$ est alors une série entière. On calcule son rayon de convergence par la règle de d'Alembert. Pour $x \neq 0$:

$$\lim \left(\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \right) = \lim \left(\frac{x^2}{4(n+1)|\alpha+n+1|} \right) = 0$$

Donc le rayon de convergence est infini.

$$\boxed{f_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$$

3.

1. On peut dériver une série entière sur le disque ouvert de convergence donc ici sur $\mathbb{R}$, et par dérivation termes à termes :

$$f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n x^{2n-1}}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)} \ , \ f''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n (2n-1) x^{2n-2}}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)}$$

De plus, après changement d'indice comme $P_n(\alpha) = (n+\alpha) P_{n-1}(\alpha)$

$$x f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n} n! P_n(a)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2^{2n-2}(n-1)! P_{n-1}(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+\alpha) x^{2n-1}}{2^{2n-2}(n-1)! P_n(\alpha)}$$

En rassemblant, on obtient

$$x f''_\alpha(x) + (2\alpha+1) f'_\alpha(x) + x f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^n (2n-1)}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)} + \frac{2(-1)^n (2\alpha+1)}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)} + \frac{(-1)^{n-1}(n+\alpha)}{2^{2n-2}(n-1)! P_n(\alpha)} \right) x^{2n-1}$$

Or

$$\begin{aligned} & \frac{2(-1)^n (2n-1)}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)} + \frac{2(-1)^n (2\alpha+1)}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)} + \frac{(-1)^{n-1}(\alpha+n)}{2^{2n-2}(n-1)! P_n(\alpha)} \\ = & \ (-1)^n \frac{2(2n-1) + 2(2\alpha+1) - 4(\alpha+n)}{2^{2n}(n-1)! P_n(\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f_\alpha \text{ est bien solution de } (E_\alpha) \text{ sur } \mathbb{R}}$$

2. Soit y une solution de (E_α) paire et développable en série entière au voisinage de 0. On peut donc écrire $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n} x^{2n}$ avec R son rayon de convergence, supposé non nul. On obtient en utilisant le théorème de dérivation terme à terme et en reportant comme ci dessus :

$$\forall x \in \ ]-R, R[\quad \sum_{n=1}^{\infty} [(2n(2n-1) + (2\alpha+1)2n) b_{2n} + b_{2n-2}] x^{2n-1} = 0$$

Par unicité du développement en série entière, il en résulte

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad b_{2n} = -\frac{b_{2n-2}}{4n(n+\alpha)}$$

d'où par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad b_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} b_0$$

Or $b_0 = y(0)$, donc

$$\boxed{y = y(0) f_\alpha}$$

1. La fonction g_α est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ comme produit de telles fonctions, et sur cet intervalle

$$g'_\alpha(x) = -2\alpha x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x)$$

et

$$g''_\alpha(x) = 2\alpha(2\alpha+1)x^{-2\alpha-2} f_{-\alpha}(x) - 4\alpha x^{-2\alpha-1} f'_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha} f''_{-\alpha}(x)$$

Donc

$$\begin{aligned} xg''_\alpha(x) + (2\alpha+1)g'_\alpha(x) + xg_\alpha(x) &= \left(\begin{array}{c} \left(2\alpha(2\alpha+1)x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x) - 4\alpha x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x) + x^{-2\alpha+1} f''_{-\alpha}(x)\right) \\ + \left(-2\alpha(2\alpha+1)x^{-2\alpha-1} f_{-\alpha}(x) + (2\alpha+1)x^{-2\alpha} f'_{-\alpha}(x)\right) + x^{-2\alpha+1} f_{-\alpha}(x) \end{array} \right) \\ &= x^{-2\alpha}[xf''_{-\alpha}(x) + (\ -2\alpha+1)) f'_{-\alpha}(x) + xf_{-\alpha}(x)] = 0 \end{aligned}$$

ce dernier terme est nul car $f_{-\alpha}$ est solution de $(E_{-\alpha})$.

$$\underline{g_\alpha \text{ est solution de } E_\alpha \text{ sur }]0,+\infty[}$$

2. Considérons une combinaison linéaire nulle de f_α et g_α :

$$\lambda f_\alpha + \mu g_\alpha = 0$$

La somme d'une série entière est continue en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\alpha(x) = f_\alpha(0) = 1$.

De même $\lim\limits_{x\to 0^+} f_{-\alpha}(x) = 1$ et par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} g_\alpha(x) = \left\{ \begin{array}{l} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{array} \right.$.

On a donc en passant à la limite : $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \alpha > 0 \ ,\ \mu = 0 \\ \text{si } \alpha < 0 \ ,\ \lambda = 0 \end{array} \right.$ et donc dans les deux cas $\lambda = \mu = 0$ car f_α et g_α ne sont pas la fonction nulle.

<u>Les deux fonctions sont donc linéairement indépendantes.</u>

On sait que l'ensemble des solutions sur un intervalle où le coefficient de y" ne s'annule pas d'une équation différentielle linéaire est un espace vectoriel de dimension 2, donc la solution générale de (E_α) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est :

$$\boxed{\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ ,\forall x\in\,]0,+\infty[\quad y(x) = \lambda f_\alpha(x) + \mu g_\alpha(x)}$$

3. La dérivée de $y(-x)$ est $-y'(-x)$ et sa dérivée seconde est $y(-x)$. Donc $x \mapsto y(-x)$ est solution de (E_α) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[\quad xy''(-x) - (2\alpha+1)y'(-x) + xy(-x) = 0$$

ce qui, en substituant $-x$ à x, équivaut à

$$\forall x \in\ ]-\infty,0[\quad -xy''(x) - (2\alpha+1)y'(x) - xy(x) = 0$$

donc à y solution de (E_α) sur $]-\infty,0[$.

Comme f_α et $f_{-\alpha}$ sont paires, on a donc comme solution générale sur $]-\infty,0[$:

$$\boxed{\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ ,\forall x\in\,]-\infty,0[\quad y(x) = \lambda f_\alpha(x) + \mu(-x)^{-2\alpha} f_{-\alpha}(x)}$$

4. On adapte les calculs du **I.4**

   1. $$j'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} f_\alpha(x) + x^\alpha f'_\alpha(x)$$

      et

      $$j''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} f_\alpha(x) + 2\alpha x^{\alpha-1} f'_\alpha(x) + x^\alpha f''_\alpha(x)$$

      Donc

      $$x^2 j''_\alpha(x) + xj'_\alpha(x) + (x^2-\alpha^2)j_\alpha(x) = x^{\alpha+1}[xf''_\alpha(x) + (\ 2\alpha+1)) f'_\alpha(x) + xf_\alpha(x)] = 0$$

      j_α est donc solution de (B_α) . Et donc $j_{-\alpha}$ est solution de $(B_{-\alpha}) = (B_\alpha)$.

   2. Le réel α est non nul (car $\alpha \notin \mathbb{Z}$), donc on peut supposer $\alpha > 0$ (l'autre cas est symétrique) j_α tend vers zéro en 0^+ et $j_{-\alpha}$ vers $+\infty$. Comme en **I.4.2**, elles sont donc linéairement indépendantes. La solution générale de (B_α) sur $]0,+\infty[$ est

      $$\boxed{\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\ ,\forall x\in\,]0,+\infty[\quad y(x) = \lambda j_\alpha(x) + \mu j_{-\alpha}(x)}$$

      On montre comme en **I.4.3** que y est solution de B_α sur $]-\infty,0[$ si et seulement si $x \mapsto y(-x)$ est solution sur $]0,+\infty[$. Donc la solution générale de B_α sur $]-\infty,0[$ est :

      $$\exists\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall x \in\ ]-\infty,0[\quad y(x) = \lambda j_\alpha(-x) + \mu j_{-\alpha}(-x)$$

PARTIE II

1. On a une intégrale à paramètre à dériver :
   Posons $\varphi(x,t) = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos xt$.

   - pour tout $t \in [0,1[$ la fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

   $$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sin xt \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos xt$$

   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0,1[$, et on a domination :

   $$|\varphi(x,t)| \leq (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \begin{cases} \text{continue sur } [0,1[\\ \text{intégrable sur } (0,1[\text{ car } (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} = ((1-t)(1+t))^{\alpha-\frac{1}{2}} \sim 2^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \text{ avec } \alpha - \dfrac{1}{2} > -1 \\ \text{indépendante de } x \end{cases}$$

     La domination par une fonction intégrable assure l'intégrabilité.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,1[$, et on a la même domination :

   $$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur $[0,1[$, et on a toujours la même domination :

   $$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$$

   - On en déduit donc que h_α est C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on peut dériver sous le signe $\displaystyle\int$.

2.
   1. On a donc :

   $$h''_\alpha(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\,dt = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt$$

      et donc :

   $$\begin{aligned} xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) &= x\left(\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt - \int_0^1 t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos xt\,dt\right) \\ &= x\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\cos xt\,dt \end{aligned}$$

   2. On intègre par partie en posant $u = (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}$ et $v = \sin xt$ (fonctions C^1 sur $[0,1[$) , $u' = -t\,(2\alpha+1)\,(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ et $v' = x\cos xt$. Pour $a \in [0,1[$. Alors

   $$\begin{aligned} \int_0^a (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}x\cos xt\,dt &= \left[(1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\sin xt\right]_0^a + (2\alpha+1)\int_0^a t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sin xt\,dt \\ &= (1-a^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}\sin xa + +(2\alpha+1)\int_0^a t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sin xt\,dt \end{aligned}$$

      En faisant tendre a vers 1, il vient

   $$xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = (2\alpha+1)\int_0^1 t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\sin xt\,dt = (2\alpha+1)h'_\alpha(t)$$

   $$\boxed{\text{Donc } h_\alpha \text{ est bien solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_\alpha)}$$

      .

3. On développe le cosinus en série entière :

$$h_\alpha(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!} dt$$

On doit intégrer termes à termes cette série : posons $u_n : t -> (-1)^n (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \dfrac{(xt)^{2n}}{(2n)!}$.

- La série $\sum u_n$ converge simplement vers $t \mapsto \varphi(x,t)$ par construction
- les fonctions u_n sont intégrables sur $[0,1[$ car continue sur $[0,1[$ et

$$|u_n(t)| = (1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}(1+t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{(xt)^{2n}}{(2n)!} \sim_1 2^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}} \text{ avec } \alpha - 1/2 > -1$$

- La série $\sum \int_0^1 |u_n(t)|\, dt$ converge car pour $t \in [0,1[$, on peut écrire

$$\int_0^1 |u_n(t)|\, dt \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\, dt$$

  Or l'intégrale est une constante, et la série de terme général $\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ converge (sa somme est $\operatorname{ch}(x)$) .
- L'intégration terme à terme est donc possible, et on obtient la relation demandée.

$$\boxed{h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} x^{2n}}$$

4. On a vu au **I.3.2** que toute solution y de (E_α) développable en série entière et paire, était égale à $y(0) f_\alpha$. C'est le cas de h_α (la parité est évidente), donc

$$h_\alpha = h_\alpha(0) f_\alpha$$

5. Par unicité du développement en série entière, et en remarquant que $h_\alpha(0) = I_0(\alpha)$, on obtient

$$\boxed{I_n(\alpha) = I_0(\alpha) \frac{(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}}$$

PARTIE III

1. Le sujet exprime $\widetilde{F}$ en fonction de F . Toutes les fonctions sont C^2 : $\begin{cases} (r,\theta) -> (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \text{ de }]0,+\infty[\times \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \\ F \text{ sur } \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \end{cases}$

   on peut donc dériver les fonctions composées.
   La fonction $\tilde{F}$ est composée de deux fonctions de classe C^2, et :

$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial F}{\partial x}[r\cos\theta, r\sin\theta] \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial F}{\partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta] \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial F}{\partial x}[r\cos\theta, r\sin\theta] + \sin\theta \frac{\partial F}{\partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta]$$

   On dérive de nouveau par rapport à r on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta \left(\cos\theta \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}[r\cos\theta, r\sin\theta] + \sin\theta \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta] \right) + \\ \sin\theta \left(\cos\theta \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta] + \sin\theta \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}[r\cos\theta, r\sin\theta] \right) \end{pmatrix} \\ &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[r\cos\theta, r\sin\theta] + 2\cos\theta\sin\theta \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta] + \sin^2\theta \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[r\cos\theta, r\sin\theta] \end{aligned}$$

   Passons à θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta \frac{\partial F}{\partial x}[r\cos\theta, r\sin\theta] + r\cos\theta \frac{\partial F}{\partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta] \\ &= r\left(-\sin\theta \frac{\partial F}{\partial x}[r\cos\theta, r\sin\theta] + \cos\theta \frac{\partial F}{\partial y}[r\cos\theta, r\sin\theta] \right) \end{aligned}$$

En redérivant par rapport à θ, r est en facteur.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= r\left(\begin{array}{c} -\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[r\cos\theta,r\sin\theta]+r\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}[r\cos\theta,r\sin\theta]\right)-\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}[r\cos\theta,r\sin\theta] \\ \cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}[r\cos\theta,r\sin\theta]+r\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[r\cos\theta,r\sin\theta]\right)-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}\end{array}\right) \\
&= r\left(\begin{array}{c} r\sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[r\cos\theta,r\sin\theta]+r\cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[r\cos\theta,r\sin\theta]-2r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}[r\cos\theta,r\sin\theta] \\ -\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}[r\cos\theta,r\sin\theta]-\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}[r\cos\theta,r\sin\theta]\end{array}\right)
\end{aligned}$$

Et en rassemblant tout ceci, on obtient :

$$\begin{array}{rclllll}
\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta) &=& & & +\cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[x,y] & +2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}[x,y] & +\sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[x,y] \\
\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}(r,\theta) &=& +\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}[x,y] & +\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}[x,y] & & & \\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta) &=& -\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}[x,y] & -\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}[x,y] & +\sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[x,y] & -2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}[x,y] & +\cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[x,y]
\end{array}$$

et donc :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}[x,y]+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}[x,y]}$$

Une remarque du type $\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}\right)}{\partial r}$ ne simplifie pas énormément le calcul.

2. L'hypothèse "non identiquement nulle " est importante. Par exemple si $F=0$, $f=0$, et g quelconque (non périodique) est solution du problème.

   1. $\widetilde{F}$ étant non identiquement nulle, .Il existe au moins un réel r_0 tel que $f(r_0)\neq 0$ et un angle θ_0 tel que $g\left(\theta_0\right)\neq 0$. On a alors
   $$g(\theta)=\frac{\tilde{F}(r,\theta)}{f(r_0)}=\frac{F(r_0\cos\theta,r_0\sin\theta)}{f(r_0)}$$
   qui est bien 2π-périodique.

   2. Vue la forme de $\widetilde{F}$:
   $$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}(r,\theta)=f'(r)g(\theta)\ ,\ \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta)=f''(r)g(\theta)\ ,\ \frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta)=f(r)g''(\theta)$$
   donc :
   $$\Delta F(r\cos\theta,r\sin\theta)=f''(r)g(\theta)+\frac{1}{r}f'(r)g(\theta)+\frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)$$
   Donc la condition $\Delta F+\omega^2F=0$ équivaut à
   $$f''(r)g(\theta)+\frac{1}{r}f'(r)g(\theta)+\frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)+\omega^2f(r)g(\theta)=0$$
   ou encore (en multipliant par $r^2\neq 0$)
   $$rg(\theta)\left[rf''(r)+f'(r)+\omega^2r^2f(r)\right]=-f(r)g''(\theta)$$
   On peut diviser par $f(r_0)$ non nul :
   $$g''(\theta)=-r_0\frac{r_0f''(r_0)+f'(r_0)+r_0\omega^2f(r_0)}{f(r_0)}g(\theta)$$
   Si on pose $\lambda=r_0\frac{r_0f''(r_0)+f'(r_0)+r_0\omega^2f(r_0)}{f(r_0)}$ on a $g''(\theta)+\lambda g(\theta)=0$.
   $$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\quad g''(\theta)+\lambda g(\theta)=0}$$

On a donc pour tout θ et tout $r > 0$: :

$$rg(\theta)\left[rf"(r) + f'(r) + \omega^2 r f(r)\right] = \lambda f(r) g(\theta)$$

Il suffit alors de prendre la valeur en θ_0 et de diviser par $g(\theta_0) \neq 0$ pour avoir :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{R}^{+*}\ ,\ r^2 f"(r) + rf'(r) + (\omega^2 r^2 - \lambda) f(r) = 0}$$

3. On cherche à résoudre l'équation différentielle linéaire à coefficients constants : $g'' + \lambda g = 0$
   - Si $\lambda < 0$, les solutions sont de type $a\exp(x\sqrt{-\lambda}) + b\exp(-x\sqrt{-\lambda})$.
     - Si $a \neq 0$ la limite en $+\infty$ est $signe(a).\infty$:la fonction est non périodique donc $a = 0$
     - Si $b \neq 0$ on regarde la limite en $-\infty$.
     - la seule solution périodique est la fonction nulle (impossible ici)
   - Si $\lambda = 0$ on a un entier naturel. Les solutions sont du type $ax + b$ périodique si et seulement si $a = 0$.
   - Si λ est strictement positif, alors les solutions sont de type

     $$a\cos(\theta\sqrt{\lambda}) + b\sin(\theta\sqrt{\lambda}) = A\cos\left(\theta\sqrt{\lambda} + \phi\right)$$

     qui sont 2π-périodiques si et seulement si $A = 0$ (exclu) ou $\cos\left(\theta\sqrt{\lambda} + \phi\right) = \cos\left(\theta\sqrt{\lambda} + \phi + 2\pi\sqrt{\lambda}\right)$. En prenant $\theta\sqrt{\lambda} + \phi = 0$ on a $\cos(2\pi\sqrt{\lambda}) = 1$ donc $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{Z}$ donc $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\lambda \text{ est de la forme } p^2\text{, avec } p \in \mathbb{N}}$$

4. le calcul précédent donne :
   - Si $p = 0$, g est donc constante.
   - Sinon, $g(\theta)$ est de la forme : $a\cos(p\theta) + b\sin(p\theta)$

3.

1. Si $p = 0$, l'équation (i) s'écrit

   $$rf''(r) + f'(r) = 0$$

   donc $f'(r)$ est solution de l'équation différentielle $ry' + y = 0$, donc de la forme $A\exp\left(-\int \frac{dr}{r}\right) = \frac{A}{r}$. Donc

   $$\boxed{f(r) \text{ est de la forme } A\ln r + B}$$

   .

2. Si $p \neq 0$, donc $\lambda \neq 0$, (i) s'écrit

   $$r^2 f''(r) + rf'(r) - \lambda f(r) = 0$$

   C'est une équation différentielle linéaire du second ordre le coefficient de f" n'ayant pas de racines sur le domaine de calcul : $\mathbb{R}^{+*}$. L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 . Or une fonction du type $r \mapsto r^\alpha$ est solution si et seulement si $\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0$, soit $\alpha = \pm p$. Ce qui donne deux solutions linéairement indépendantes : $r- > r^p$ et $r- > r^{-p}$,

   $$\boxed{f(r) \text{ est de la forme } Ar^p + Br^{-p}}$$

   Réciproquement on peut alors vérifier que dans les deux cas : $\widetilde{F}(r,\theta) = \begin{cases} k\,(A\ln r + B) \\ (a\cos(p\theta) + b\sin(p\theta))\left(Ar^p + Br^{-p}\right) \end{cases}$ vérifient bien $\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial \theta^2}(r,\theta) = 0$ et donc $\Delta F = 0$.

4. On a $f_1'(r) = \frac{1}{\omega} f'\left(\frac{r}{\omega}\right)$ et $f_1''(r) = \frac{1}{\omega^2} f_1''\left(\frac{r}{\omega}\right)$.

   Donc

   $$r^2 f_1''(r) + rf_1'(r) + (r^2 - p^2) f_1(r) = \left(\frac{r}{\omega}\right)^2 f''\left(\frac{r}{\omega}\right) + \frac{r}{\omega} f'\left(\frac{r}{\omega}\right) + \left(\omega^2\left(\frac{r}{\omega}\right)^2 - \lambda\right) f\left(\frac{r}{\omega}\right)$$

   qui est nul parce que f est solution de (i).

   Remarque On s'est ainsi ramené à (B_p), étudiée dans la première partie. On a donc les fonctions f sous forme de série entière , ou sous forme d'intégrales avec la seconde partie.