Corrigé CCP PC maths 2 2007
Partie I

1. *Remarque* (f_0, f_1) *est la base introduite dans le cours pour l'étude des solutions.*

   Par récurrence :

   - Soit y une solution de (E) sur I, y est de classe C^2 sur I.
   - Supposons y de classe C^n sur I . Alors $y'' = -\varphi.y$ est de classe C^n car φ est de classe C^∞, donc y de classe C^{n+2} et donc aussi de classe C^{n+1} sur I.
   - Par récurrence sur n, y est de classe C^n sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$\boxed{y \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I}$$

2. Soit y solution de (E) sur I. Comme I est symétrique par rapport à 0, on peut définir sur I la fonction z : $\forall x \in I$, $z(x) = y(-x)$ et elle est de classe C^∞ sur I car y l'est.

   De plus,
   $$\forall x \in I, z'(x) = -y'(-x) \text{ et } z''(x) = y''(-x)$$

   Donc comme φ est paire

   $$\forall x \in I \quad z''(x) + \varphi(x)z(x) = y''(-x) + \varphi(-x).y(-x) = 0$$

   La fonction z est donc solution de (E) sur I.

   $$\boxed{\text{Si } y \text{ est solution de } (E) \text{ , } x -> y(-x) \text{ est aussi solution}}$$

3. - Soit z_0 la fonction définie sur I par $\forall x \in I,\ z_0(x) = f_0(-x)$.
     D'après la question précédente : z_0 est solution de (E) sur I et vérifie les conditions initiales $z_0(0) = f_0(0) = 1$, $z_0'(0) = -f_0'(0) = 0$. D'après le résultat rappelé en préambule (ou d'après le théorème de Cauchy Lipchitz) , il existe une unique solution de (E) sur I vérifiant ces conditions initiales : par conséquent $z_0 = f_0$ et $\boxed{\text{la fonction } f_0 \text{ est paire}}$
     .
   - Soit z_1 la fonction définie sur I par $z_1(x) = -f_1(-x)$.
     D'après **I.2**, z_1 est solution de (E) sur I (opposé d'une solution d'une équation linéaire homogène) , et $z_1(0) = -f_1(0) = 0$ et $z_1'(0) = f_1'(0) = 1$.
     D'après l'unicité de la solution de (E) vérifiant ces conditions initiales, $z_1 = f_1$ et $\boxed{\text{la fonction } f_1 \text{ est impaire}}$.
   - (E) est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, résoluble dont les coefficients sont des fonctions continues sur I : on sait alors que l'ensemble des solutions de (E) sur I est un espace vectoriel de dimension 2.
     (f_0, f_1) est un système de solutions de (E) sur I, de cardinal 2. De plus il est libre :
     Pour tout $(\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$, en prenant la valeur en 0 puis la dérivée en 0, $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 = 0$
     On en déduit que (f_0, f_1) est une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) sur I. ce que l'on peut encore traduire en disant que la solution générale de (E) est du type :

     $$\boxed{y \text{ solutions de } (E) \text{ si et seulement si } \left(\exists\, (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ , } y = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \quad (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2\right)}$$

     Remarque : on peut aussi calculer le Wronskien des deux fonctions.
   - Soit $f = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$ une solution de (E). Or dans $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires . Donc f est paire (impaire) si et seulement si $\lambda_1 = 0$ ($\lambda_0 = 0$)

     $$\boxed{\text{Les solutions de } (E) \text{ paires sont les fonctions de Vect}\,(f_0) \text{ et les solutions de } (E) \text{ impaires sont les fonctions de Vect}\,(f_1).}$$

4. Soit $W = f_1' f_0 - f_1 f_0'$ le Wronskien de f_0 et f_1 . Comme on a montré que (f_0, f_1) est un système fondamental de solution, W est toujours non nul.

1. u est C^{∞} sur I comme quotient à dénominateur non nul de fonctions C^{∞} et

$$u' = \frac{f_1' f_0 - f_0' f_1}{f_0^2} = \frac{W}{f_0^2}$$

Donc u' ne s'annule pas sur I .
D'autre part,

$$u'' = \frac{W' f_0 - 2W f_0'}{f_0^3}$$

Mais $W' = f_1'' f_0 - f_0'' f_1 = -\varphi f_1 f_0 + \varphi f_0 f_1 = 0$ et

$$\boxed{\frac{u''}{u'} = -2\frac{f_0'}{f_0}}$$

2. On a donc

$$\int \frac{u''}{u'} = -2\int \frac{f_0'}{f_0}$$

Soit

$$\ln\left(|u'|\right) = -2\ln\left(|f_0|\right) + K$$

et donc

$$u' = \pm e^K \frac{1}{f_0^2}$$

d'où le résultat voulu en posant $B = \pm K$ (B est bien constante car les fonctions étant continues sans racines , ne peuvent pas changer de signe).
Remarque : on peut aussi partir de $W' = 0$ pour en déduire que W est constante. (le rapport du jury signale que cette méthode a été acceptée aussi)

3. De plus $u'(0) = \dfrac{f_1'(0)f_0(0) - f_0'(0)f_1(0)}{f_0^2(0)} = 1$ et $\dfrac{1}{f_0^2(0)} = 1$, donc $B = 1$.
On a donc :

$$\forall x \in I :\ u(x) = u_0 + C$$

Si $x = 0$ on trouve $C = 0$. D'où :

$$\boxed{f_1 = f_0 u_0}$$

5.

1. $\forall x \in I, f(x) = \cos^2(x)$, $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$ et $f''(x) = 2\left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right)$
Comme f ne s'annule pas sur I et qu'elle est solution de (E), on a donc :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = -\frac{f''(x)}{f(x)} = 2\left(1 - \tan(x)^2\right)$$

$$\boxed{\varphi = 2\left(1 - \tan^2\right)}$$

On remarque que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. et donc par unicité $\boxed{f_0 = f}$.

2. On a pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ comme $\dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 = \tan'$

$$u_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos(t)^4} = \int_0^x \frac{1+\tan(t)^2}{\cos(t)^2} dt = \int_0^x \left(1 + \tan(t)^2\right)(\tan(t))'\, dt = \left[\tan(t) + \frac{1}{3}\tan(t)^3\right]_0^x$$

$$\boxed{\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad u_0(x) = \tan(x) + \frac{1}{3}\tan(x)^3}$$

3. D'après **I.4.3**, pour tout $x \in I =]-\pi/2, \pi/2[$,

$f_1(x) = u_0(x) f_0(x) = \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\cos^2 x$

$$\boxed{f_1(x) = \left(\tan(x) + \frac{1}{3}\tan(x)^3\right)\cos(x)^2}$$

On a une base de l'espace vectoriel des solutions .Donc la solution générale de (E) sur I est :

$$\boxed{y(x) = \lambda_0 \cos^2 x + \lambda_1 \left(\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x\right)\cos^2 x \qquad (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2}.$$

plusieurs variantes possibles . Par exemple $f_1(x) = \left(\tan(x) + \frac{1}{3}\tan(x)^3\right)\cos(x)^2 = \tan(x)\left(\cos(x)^2 + \frac{\sin(x)^2}{3}\right) = \cdots$

Partie II

1. Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après **I.1**, y est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, Y(x) = y(x+2\pi)$ est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Y'(x) = y'(x+2\pi)$ et $Y''(x) = y''(x+2\pi)$.

   De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme φ est 2π-périodique,

   $$Y''(x) + \varphi(x)Y(x) = y''(x+2\pi) + \varphi(x+2\pi)y(x+2\pi) = 0.$$

   $$\boxed{\text{Si } y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R},\ Y : x \mapsto y(x+2\pi) \text{ l'est également}}$$

2. En particulier les fonctions : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x -> f_0(x+2\pi)$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, x -> f_1(x+2\pi)$ sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

   Comme (f_0, f_1) est une base de l'espace vectoriel des solutions , elles sont combinaisons linéaires de f_0 et f_1 ce qui assure l'existence de constantes $(w_{i,j})$ telles que :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : f_0(x+2\pi) = w_{00} f_0(x) + w_{10} f_1(x) \quad f_1(x+2\pi) = w_{01} f_0(x) + w_{11} f_1(x)}$$

   On a alors en dérivant :

   $$\forall x \in \mathbb{R} : f_0'(x+2\pi) = w_{00} f_0'(x) + w_{10} f_1'(x) \quad f_1'(x+2\pi) = w_{01} f_0'(x) + w_{11} f_1'(x)$$

   En considérant les valeurs en $x = 0$, on obtient $w_{0,0} = f_0(2\pi), w_{10} = f_0'(2\pi), w_{01} = f_1(2\pi), w_{11} = f_1'(2\pi)$

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_0(x+2\pi) = f_0(2\pi) f_0(x) + f_0'(2\pi) f_1(x) \\ f_1(x+2\pi) = f_1(2\pi) f_0(x) + f_1'(2\pi) f_1(x) \end{cases}}$$

3. Remarque : W est la valeur en 2π du Wronskien de f_0 et f_1

   Soit g une solution de (E) 2π périodique non identiquement nulle. Notons (α, β) les coordonnées de g dans la base (f_0, f_1). On a donc $g = \alpha f_0 + \beta f_1$.

   Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a d'après II.2.

   $$\begin{array}{rcl} g(x) & = & g(x+2\pi) = \alpha f_0(x+2\pi) + \beta f(x+2\pi) \\ & = & (w_{0,0}\alpha + w_{0,1}\beta) f_0(x) + (w_{1,0}\alpha + w_{1,1}\beta) f_1(x) \end{array}$$

   et donc comme on a une base :$\begin{cases} \alpha = w_{0,0}\alpha + w_{0,1}\beta \\ \beta = w_{1,0}\alpha + w_{1,1}\beta) \end{cases}$. c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

   De plus g n'est pas identiquement nulle donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq (0)$

   W admet 1 pour valeur propre et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ comme vecteur propre associé.

   Réciproquement si 1 est valeur propre il existe un vecteur propre noté $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. La fonction $g = \alpha f_0 + \beta f_1$ vérifie alors bien $g(x+2\pi) = g(x)$ et $g \neq \widetilde{0}$

   $$\boxed{(E) \text{ admet une solution non nulle } 2\pi \text{ périodique ssi 1 est valeur propre de } W}$$

4. Soit g une solution de (E) non nulle et 2π-périodique.

   D'après la question **I.2**, la fonction $x \mapsto g(-x)$ est encore solution de (E).

   De plus par linéarité les fonctions $g^+ : x \mapsto g(x) + g(-x)$ et $g^- : x \mapsto g(x) - g(-x)$ sont encore solutions de (E) et sont 2π périodique.

   Or g^+ est paire et donc d'après **I.3** $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $g^+ = \lambda.f_0$

   De même g^- est impaire et donc $\exists \mu, g^- = \mu f_1$

   - Si $\lambda = \mu = 0$ alors $g = \dfrac{g^+ + g^-}{2} = \widetilde{0}$ absurde.
   - Si $\lambda \neq 0$ $f_0 = \dfrac{g^+}{\lambda}$ est paire
   - Si $\mu \neq 0$: $f_1 = \dfrac{g^-}{\mu}$ est impaire.

5. Soit $f(x,t) = K(x,t)f_0(t)$ sur $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$

   1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto K(x,t)f_0(t)$ est continue sur $[-\pi, \pi]$ donc F est bien définie sur $\mathbb{R}$. De plus comme pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$, $K(-x,t) = K(x,t)$, la fonction F est paire.

      Pour montrer que f est C^2 on utilise le théorème de Leibniz :

      - par théorèmes d'opérations et composition, la fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
      - f admet donc des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ continues sur $\mathbb{R}$ et :

      $$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [-\pi, \pi], \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -k \cos t \sin x \, e^{k \cos t \cos x} f_0(t) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = k^2 \cos^2 t \sin^2 x \, e^{k \cos t \cos x} f_0(t) - k \cos t \cos x \, e^{k \cos t \cos x} f_0(t) \end{cases}$$

      - $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[-\pi, \pi]$ (segment) donc elles y sont intégrables.
      - Domination de la dérivée seconde :

      $$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[-\pi, \pi], \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq (k^2 + |k|).e^{|k|} \left| f_0(t) \right|.$$

      Cette fonction est continue sur $[-\pi, \pi]$ (segment) donc y est intégrable.
      On déduit du théorème de dérivation des intégrales à paramètre que la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et

      $$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} F'(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} -k \cos t \sin x e^{k \cos t \cos x} f_0(t) dt \\ F''(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (k^2 \cos^2 t \sin^2 x - k \cos t \cos x)^{k \cos t \cos x} f_0(t) dt \end{cases}$$

   2. On a : $K(x,t) = K(t,x)$ donc on peut utiliser une symétrie pour réduire le nombre de calculs.
      si on dérive :

      $$\frac{\partial K}{\partial t}(x,t) = -\left(k \cos x \sin t\right) K(x,t) et \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) = (k^2 \cos^2 x \sin^2 t - k \cos x \cos t) K(x,t)$$

      et par symétrie

      $$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) = (k^2 \cos^2 t \sin^2 x - k \cos t \cos x) K(x,t)$$

      $$\begin{aligned} \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t) + (a - k^2 \sin^2 x) K(x,t) &= (k^2 \cos^2 t \sin^2 x - k \cos t \cos x + a - k^2 \sin^2 x) K(x,t) \\ &= [-k^2 \sin^2 x \sin^2 t - k \cos t \cos x + a] K(x,t). \\ &= \frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t) + (a - k^2 \sin^2 t) K(x,t) \text{ toujours par symétrie.} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}(x,t)+(a-k^2\sin^2 x)K(x,t)=\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)+(a-k^2\sin^2 t)K(x,t)}$$

En utilisant l'expression de F'' trouvée précédemment, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F''(x)+(a-k^2\sin 2x)F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t).f_0(t)dt+(a-k^2\sin^2 x)\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0(t)dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial xc^2}(x,t)+(a-k^2\sin^2 x)K(x,t)\right)f_0(t)dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)dt+(a-k^2\sin^2 t)K(x,t\right))f_0(t)dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)f_0(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi}(a-k^2\sin^2 t)K(x,t))f_0(t)dt
\end{aligned}$$

les fonctions $t\mapsto \frac{\partial K}{\partial t}(x,t)$ et f_0 sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et en intégrant par parties on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)\,f_0(t)dt=\left[\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,f_0(t)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K}{\partial t}(x,t).f_0'(t)dt$$

Mais $t\mapsto K(x,t)$ est 2π périodique donc $t\mapsto\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)$ l'est également et par hypothèse la fonction f_0 est 2π-périodique.

On en déduit que $\left[\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)\,f_0(t)\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$

On a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)\,f_0(t)dt=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K}{\partial t}(x,t).f_0'(t)dt$$

Une nouvelle intégration par partie donne :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 K}{\partial t^2}(x,t)\,f_0(t)dt=[-K(x,t).f_0'(t)]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0''(t)dt.$$

$t\mapsto -K(x,t)f_0'(t)$ est 2π-périodique en tant que produit de deux fonctions 2π-périodiques et donc $[-K(x,t).f_0'(t)]_{-\pi}^{\pi}=0.$

Finalement,

$$\begin{aligned}
F''(x)+(a-k^2\sin^2 x)F(x) &= \int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0''(t)+\int_{-\pi}^{\pi}(a-k^2\sin^2 t)K(x,t))f_0(t)dt\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left(f_0''(t)+(a-k^2\sin^2 t)f_0(t)\right)K(x,t)dt\\
&= 0 \quad \text{car } f_0 \text{ solution de } (E)
\end{aligned}$$

$\forall x\in\mathbb{R},\quad F''(x)+(a-k^2\sin^2 x)F(x)=0$

3. La fonction F est paire et solution de (E) sur $\mathbb{R}$. D'après **I.3**, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $F=\lambda f_0$, ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad\int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos t\cos x}f_0(t)dt=\lambda f_0(x)}$$

Partie III

1. $(E)\quad y''+\omega^2 y=0$ avec $\omega>0$ est une équation linéaire à coefficients constants classique:la solution générale de (E) sur I est :

$$y(x)=\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)\ \text{ avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

compte tenu des conditions initiales f_0 et f_1 sont définies sur I par :

$$\boxed{\forall x\in I\quad f_0(x)=\cos(\omega x)\qquad f_1(x)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)}$$

2. Comme sin est C^∞ sur $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $]-1,1[$, on a bien $y\in C^\infty(I,\mathbb{R})$

De plus,

$$\forall x\in I\quad y'(x)=z'(\sin x).\cos x\qquad y''(x)=\cos 2x z''(x)-\sin x z'(\sin x)$$

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I\ , \quad &\iff \forall x\in I\quad (1-\sin^2 x)z''(\sin x)-\sin x z'(\sin x)+\omega^2 z(\sin x)=0\\ &\iff \forall X\in]-1,1[\quad (1-X^2)z''(X)-Xz'(X)+\omega^2 z(X)=0\end{aligned}$$

en posant $X=\sin(x)$ qui décrit bien $]-1,1[$ entier si x décrit $]-\pi/2,\pi/2[$

3.

1. cette question est une analyse , la suivante sera la vérification.
   - degré: Dans le membre de droite de (E') chaque terme est de degré au plus d , et le coefficient de X^d est $\left(-d(d-1)-d+\omega^2\right)a_d$ et donc $\omega=\pm d$, et les quantité étant positives $\boxed{\omega=d}$. Ce qui impose que ω soit entier (non nul par hypothèse)
   - relation entre les coefficients : Pour tout $X\in]-1,1[$,

   $$z(X)=\sum_{n=0}^{d}a_nX^n,\, z'(X)=\sum_{n=1}^{d}na_nX^{n-1},\, z''(X)=\sum_{n=2}^{d}n(n-1)a_nX^{n-2}$$

   on a donc

   $$Xz'(X)=\sum_{n=1}^{d}na_nX^n=\sum_{n=0}^{d}na_nX^n \text{ et } X^2z''(X)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nX^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nX^n$$

   car pour $n=1$ et $n=0$, les termes sont nuls.
   En effectuant le changement d'indice $n->n+2$,

   $$z''(X)=\sum_{n=0}^{d-2}(n+2)(n+1)a_{n+2}X^n.$$

   z est solution de (E') si et seulement si

   $$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{d-2}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}\right)X^n+\sum_{n=0}^{d}\left(-n(n-1)a_n-na_n+\omega^2a_n\right)X^n &= 0\\ \sum_{n=0}^{d-2}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(\omega^2-n^2)a_n\right)X^n+(\omega^2-(d-1)^2)a_{d-1}X^{d-1}+\left(\omega^2-d^2\right)a_dX^d &= 0.\end{aligned}$$

   Les deux fonctions polynômes sont égales sur $]-1,1[$ de cardinal infini, donc les polynômes sont égaux donc les coefficients sont égaux.

   $$z \text{ vérifie } (E') \text{ si et seulement si } \forall n\in[[0,d-2]]\,,\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n^2-\omega^2)a_n=0 \text{ et } a_{d-1}=0$$

   Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+2)(n+1)\neq 0$, on a :

   $$\forall n\in[[0,d-2]]\,,\quad a_{n+2}=\frac{n^2-\omega^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

   - calcul des coefficients :
     - si $n=2p\leq d$ est pair : ,

     $$a_{2p}=\frac{(2p-2)^2-\omega^2)}{(2p)(2p-1)}a_{2p-2}$$

     puis par récurrence sur p :

     $$\forall p\geq 1, p\leq\frac{d}{2}\,:\ a_{2p}=a_0\prod_{k=1}^{p}\frac{(2k-2)^2-\omega^2)}{(2k)(2k-1)}=a_0\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)}{(2p)!}.$$

En effet pour $p=1$, $\dfrac{a_0}{(2p)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)=\dfrac{-\omega^2}{2}a_0=a_2$.

Si l'égalité est vraie pour un certain $p\in\mathbb{N}$,

$a_{2p+2}=\dfrac{4p^2-\omega^2}{(2p+2)(2p+1)}.\dfrac{a_0}{(2p)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)=\dfrac{a_0}{(2p+2)!}.\prod_{k=0}^{p}(4k^2-\omega^2)$.

L'égalité est vraie au rang $p+1$: la récurrence est établie.

– De même, pour tout $n=2p+1\leq d$, $a_{2p+1}=\dfrac{(2p-1)^2-\omega^2}{(2p+1)(2p)}a_{2p-1}$. Par récurrence sur p, on a alors

$$\forall p\geq 1, p\leq\frac{d-1}{2}\quad a_{2p+1}=a_1\frac{\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-\omega^2)}{(2p+1)!}$$

- contrainte : on veut $a_{d-1}=0$
  – si $d=\omega$ est pair , $d-1$ est impair or $((2k+1)^2-\omega^2)$ ne peut pas être nul (impair $\neq$ pair) donc $a_1=0$ et

$$z(X)=a_0\left(1+\sum_{p=1}^{\omega/2}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)}{(2p)!}X^{2p}\right)\right)$$

  – de même si $d=\omega$ est impair :

$$z(X)=a_1\left(X+\sum_{p=1}^{\frac{\omega-1}{2}}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-\omega^2)}{(2p+1)!}X^{2p+1}\right)\right)$$

2. Réciproquement si ω est entier non nul les deux relations qui caractérisent les solutions polynômiales de (E') sont vérifiées :

$$\forall n\in[[0,d-2]],\quad (n+2)(n+1)a_{n+2}-(n^2-\omega^2)a_n=0 \text{ et } a_{\omega-1}=0$$

- ce sont des polynômes (de degré ω)
- $a_{\omega-1}$ est nul
- si n n'a pas la parité de ω : $(n+2)(n+1)0-(n^2-\omega^2)0=0$
- si n a la parité de ω

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n^2-\omega^2)a_n &= (n+2)(n+1)\frac{n^2-\omega^2}{(n+2)(n+1)}a_n-(n^2-\omega^2)a_n\\ &= 0\end{aligned}$$

En prenant $a_0\neq 0$, on a bien une solution polynômiale non nul

$$\boxed{\text{il existe des solutions polynômiale non nul ssi } \omega\in\mathbb{N}^*}$$

Dans ce cas l'ensemble des solutions polynômiales est un espace vectoriel de dimension 1 alors que l'ensemble des solutions de (E') sur $]-1,1[$ est un espace vectoriel de dimension 2 ($1-X^2$ n'a pas de racine sur $]-1,1[$ et les coefficients sont continus).

Si $\omega\notin\mathbb{N}^*$, toutes les solutions sont non polynômiales.

$$\boxed{\text{Pour tout } \omega>0 \text{ il existe des solutions non polynômiales de } (E')}$$

3. Des solutions polynômiales de (E') on déduit des solutions de (E) :

- Si $\omega=2m$ est pair : $y_0: x->1+\displaystyle\sum_{p=1}^{\omega/2}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)}{(2p)!}\right)(\sin(x))^{2p}$ est une solution paire de (E) , donc proportionnelle à $f_0=\cos(\omega x)$ (**I.3**). .De plus les deux fonctions valent 1 en 0 et sont donc égales.

$$\forall x\in\left]-\pi/2,\pi/2\right[\quad \cos(2mx)=1+\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-4m^2)}{(2p)!}\sin^{2p}(x)\right)$$

Soit P_m la fonction polynômiale : $X\mapsto 1+\displaystyle\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}4(k^2-m^2)}{(2p)!}X^{2p}\right)$. On vérifie :

– $\deg(P_m) = 2m$ car $\dfrac{4^m}{(2m)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}(k^2-m^2) \neq 0$

– Les deux fonctions définie sur $\mathbb{R}$: $x->\cos(2mx)$ et $x->P_m(\sin(x))$ sont continues sur $\mathbb{R}, \pi$ périodique et elles sont égales sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Par passage à la limite, elles sont égales sur $[-\pi/2, \pi/2]$ donc aussi sur $\mathbb{R}$ par période.

On peut simplifier le polynôme car :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-4m^2) &= (-4)^p\prod_{k=0}^{p-1}(m+k)\prod_{k=0}^{p-1}(m-k) = (-4)^p\frac{m!}{(m-p)!}\frac{(m+p-1)!}{(m-1)!} \\ &= (-4)^p m\frac{(m+p-1)!}{(m-p)!}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_m(X) = 1+\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{(-4)^p m(m+p-1)!}{(2p)!(m-p)!}X^{2p}\right)}$$

- Si $\omega = 2m+1$: $y_1 : x \mapsto \sin(x)+\displaystyle\sum_{p=1}^{+m}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-\omega^2)}{(2p+1)!}\sin^{2p+1}(x)\right)$ est une solution impaire de (E) , donc proportionnelle à $f_1 = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x)$ (**I.3**). .De plus les dérivées des deux fonctions valent 1 en 0 , elles sont égales.

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} = \sin x+\sum_{p=1}^{m}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-(2m+1)^2))}{(2p+1)!}(\sin x)^{2p+1}\right)$$

Soit Q_m la fonction polynômiale : : $X \mapsto (2m+1)X+\displaystyle\sum_{p=1}^{+m}\left(\frac{2m+1}{(2p+1)!}\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-(2m+1)^2)X^{2p+1}\right)$:

- – $\deg(Q_m) = 2m+1$ car $\dfrac{2m+1}{(2m+1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{m-1}((2k+1)2-(2m+1)2)) \neq 0.$

  – Les fonctions définie sur $\mathbb{R}$: $x->\sin((2m+)x)$ et $x->Q_m(\sin(x))$ sont continues, d'antipériodique π et sont égales sur $]-\pi/2, \pi/2[$: Par continuité elles sont égales sur [-$\pi/2, \pi/2$] puis en utilisant leur π-antipériodicité, elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

  On a aussi une expression factorielle :

$$\boxed{Q_m(X) = (2m+1)X+\sum_{p=1}^{+m}\left(\frac{(2m+1)\,(-4)^p(m+p)!}{(2p+1)!(m-p)!}X^{2p+1}\right)}$$

4. compléments à étudier après le cours sur les séries entières : : si on cherche un développement en série entière $z(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ avec un rayon de convergence strictement positif , les calculs sont du type précédent et donne :

$$z \text{ vérifie } (E') \iff \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(\omega^2-n^2)a_n\ \right)X^n = 0$$

d'où la même relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = \frac{n^2-\omega^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

d'où le calcul des a_n selon la parité de n :

$$\begin{aligned}z(x) &= a_0\left(1+\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)}{(2p)!}\right)X^{2p}\right)+a_1\left(X+\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-\omega^2)}{(2p+1)!}\right)X^{2p+1}\right) \\ &= a_0u_0+a_1u_1\end{aligned}$$

la fonction u_0 étant un polynôme ssi le produit est nul à partir d'un certain rang : $\exists p : \omega = 2p$. idem pour u_1 . Dans le cas polynômiale la série entière est de rayon $+\infty$.

si les fonctions u_0 et u_1 ne sont pas des polynômes la Règle de D'Alembert donne pour ces deux séries un rayon de convergence 1 :

$$\lim\left(\frac{a_{n+2}}{a_n}X^2\right) = X^2$$

On a donc bien des solutions sur $]-1,1[$, et la dimension des sous espaces vectoriels montre que toutes les solutions sont obtenues.

5. En se ramenant aux solutions paires et impaires de (E) on obtient pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$

$$\begin{aligned}
\cos(\omega x) &= 1 + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(4k^2-\omega^2)}{(2p)!}\right)(\sin(x))^{2p} \\
\frac{\sin(\omega x)}{\omega} &= \sin x + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2-\omega^2))}{(2p+1)!}(\sin x)^{2p+1}
\end{aligned}$$

Le problème de l'étude en ± 1 des séries entières , donc du prolongement des relations précédentes à $\mathbb{R}$ n'était pas posé.