Corrigé du III

1.a/ par l'absurde si $\lambda$ est valeur propre et si $\vec{x}$ est vecteur propre on a $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\varphi(x) = \lambda x$, donc

$\forall p \in \mathbb{N} \quad \varphi^p(x) = \lambda^p x$,

si on suppose $|\lambda| > 1 \quad \|\varphi^p(x)\| = |\lambda|^p \, \|x\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty \quad \{\|x\| \neq 0\}$

donc $\{\varphi^p(x)\}$ n'est pas borné : abs par définition

1.b/ d'après a) $\varphi$ ne doit pas être diagonalisable.

si $\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

si $T = \mathrm{Mat}_{ij}(\varphi) \qquad \varphi^n(j) = n\lambda^{n-1} i + \lambda^n j$

donc $\|n\lambda^{n-1} i + \lambda^n j\| \geqslant \|n\lambda^{n-1} i\| - \|\lambda^n j\| = n|\lambda|^{n-1} i - |\lambda|^n j$

si on prend $\lambda = 1 \quad \|\varphi^n(j)\| \longrightarrow +\infty$ : non borné

1.c/ si $\varphi$ est diagonalisable soit $(V_i)_{i=1}^n$ une base de vecteurs propres

et $\lambda_i$ tel que $\varphi(V_i) = \lambda_i V_i$

alors tout $x \in E$ se décompose $x = \sum_{i=1}^n x_i V_i$

on a $\forall p \in \mathbb{N} \quad \varphi^p(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi^p(V_i) = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i^p V_i$

donc $\|\varphi^p(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, |\lambda_i|^p \, \|V_i\| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|V_i\|$ si $\forall i \; |\lambda_i| \leqslant 1$

$M = \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|V_i\|$ est un majorant indépendant de $p \Rightarrow$ borné

2.a/ $\varphi(x) = y + \lambda x$ par définition de $y$.

$\cancel{\varphi^2(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(x) \text{ mais } \varphi(y) = \varphi^2(x) - \lambda\varphi(x)}$

On a posé $x \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda Id)^2 \Leftrightarrow (\varphi - \lambda Id)^2(x) = \vec{0} \Leftrightarrow \varphi^2(x) - 2\lambda\varphi(x) + \lambda^2 x = 0$

donc $\varphi^2(x) = 2\lambda\varphi(x) - \lambda^2 x = 2\lambda y + \lambda^2 x$.

on suppose par récurrence : $H_p$ : $\varphi^p(x) = p\lambda^{p-1} y + \lambda^p x$

> vrai si $p = 1$ et $2$

∨ si $p = 0 \quad x = x$ : OK car $\lambda \neq 0$.

~~pas de sens si $\lambda$ -~~

si $H_p$ est vrai $\varphi^p(x) = p\lambda^{p-1} y + \lambda^p x$.

donc $\varphi^{p+1}(x) = p\lambda^{p-1}\varphi(y) + \lambda^p \varphi(x)$

$= p\lambda^{p-1}(\varphi^2(x) - \lambda\varphi(x)) + \lambda^p \varphi(x)$

$= p\lambda^{p-1}(2\lambda\varphi(x) - \lambda^2 x - \lambda\varphi(x)) + \lambda^p\varphi(x)$

$= p\lambda^p \varphi(x) - p\lambda^{p+1} x + \lambda^p \varphi(x)$

$= (p+1)\lambda^p \varphi(x) - p\lambda^{p+1} x$

$= (p+1)\lambda^p (y + \lambda x) - p\lambda^{p+1} x$

$= (p+1)\lambda^p y + \lambda^{p+1} x$

par recurrence $\forall p \in \mathbb{N}$ $\varphi^p(x) = \cancel{\varphi\,(\lambda^{p-1} y + \lambda)}$

$\varphi^p(x) = p\lambda^{p-1} y + \lambda^p x$

b) si $y \neq \vec{0}$ $\|\varphi^p(x)\| \geq p|\lambda|^{p-1}\|y\| - |\lambda|^p\|x\| = p\|y\| - \|x\|$ car $|\lambda| = 1$

donc $\|\varphi^p(x)\| \geq p\|y\| - \|x\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} +\infty$ : absurde $\varphi$ est borné

donc $y = \vec{0}$ donc $\varphi(x) = \lambda x$ et $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda Id)$

c) par theoreme de rang les dimensions sont les bonnes.

intersection soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - Id) \cap \mathrm{Im}(\varphi - Id)$

on a donc $\varphi(x) - x = \vec{0}$ et $\exists t$ $(\varphi - Id)(t) = x$

on a donc $(\varphi - Id)^2(t) = (\varphi - Id)(x) = \vec{0}$

$t \in \mathrm{Ker}(\varphi - Id)^2$ donc d'apres la ~~relation~~ question precedente $t \in \mathrm{Ker}(\varphi - Id)$

et donc $x = (\varphi - Id)(t) = \vec{0}$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi - Id) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - Id) = \mathbb{C}^n}$$

3) on montre que $\varphi$ est borné en utilisant 1. c. le resultat decoule de 2. c

$$\det(\varphi - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} p-\lambda & q & r \\ q & p-\lambda & r \\ q & r & p-\lambda \end{vmatrix}$$

si on ajoute les 3 colonnes $p+q+r = 1$ est vp

$L_2 - L_1$ donne sa valeur propre $p-q$.

$L_3 - L_2$ —— $p-r$

on verifie $(p+q+r) + (p-q) + (p-r) = 3p = \mathrm{Tr}(\varphi)$

on a $p - q < p < 1$ $\quad p - r < p < 1$.

si $q \neq r$ $(p-q, p-r, 1)$ sont 3 valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ diagonalisable